# En avant la musique

## Éléments de solutions

### PREMIERE QUESTION

**a) Fréquence de LA$_8$**

La fréquence de LA$_4$ est 870 Hz ; celle de LA$_5$ : 2x870 ; LA$_6$ : 4x870 ; LA$_7$ : 8x870 et LA$_8$ : 16x870 = **13920 Hz**, audible pour la plupart des individus.

**b) Fréquence de LA$_0$**

La fréquence de LA$_2$ est 217,5 Hz ; celle de LA$_1$ : $\frac{217{,}5}{2}$ et celle de LA$_0$ : $\frac{217{,}5}{4} = 54{,}375\ Hz$, audible pour tout le monde.

**c) Nombre d'octaves entre 15 et 38000 Hz**

$\frac{38000}{15} \approx 2533$ ; entre quelles puissances de 2 se situe 2533 ?

Or $2^{11} = 2048$ et $2^{12} = 4096$.

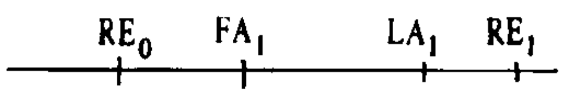
Il y a donc **plus de 11 octaves** entre 5 et 38000 Hz.

d) Quel «LA » entre 7,5 et 15 Hz ?

La fréquence de LA$_0$ est 54,375 Hz ; celle de LA$_{-1}$ : 27,875 Hz et celle de LA$_{-2}$ : 13,59375 ; la fréquence de LA$_{-2}$ est entre 7,5 et 15 Hz.

### DEUXIÈME QUESTION (gamme de Pythagore)

**a) Fréquence de LA$_1$**




LA est une quinte au-dessus de RÉ

Partons de RÉ$_1$ : 1,6875 *f*

d'où RÉ$_0$ : 0,84375 *f*

et LA$_1$ : $\frac{3}{2} \times 0{,}84375 f = 1{,}265625 f$

ou en fraction $\frac{3}{2} \times \frac{27}{32} f = \frac{81}{64} f$ qui est bien entre *f* et 2*f.*

**b) Fréquence de M1$_1$**

Le MI, situé une quinte au-dessus de LA, a une fréquence $\frac{3}{2} \times \frac{81}{64} f = \frac{243}{128} f$ . Cette fréquence est entre *f* et 2*f,* il s'agit donc bien de M1$_1$.

### c) Fréquence de SI$_1$

Le SI au-dessus de M1$_1$ a une fréquence $\frac{3}{2} \times \frac{243}{128} f = \frac{729}{256} f \approx 2{,}85 f$

S1$_1$ est donc une octave en dessous (pour que sa fréquence soit entre *f* et 2*f*) soit $\frac{729}{512} f$ .

### d) La gamme harmonique

Ordonnons les notes selon les fréquences trouvées, qui sont rappelées ici ;

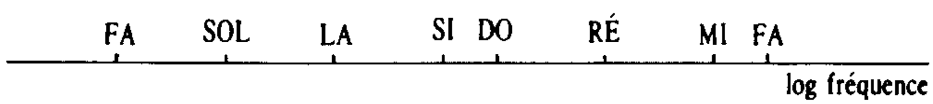
| note | FA$_1$ | SOL$_1$ | LA$_1$ | SI$_1$ |
|---|---|---|---|---|
| fréquence | 1 | 9/8 | 81/64 | 729/512 |
| valeur approchée | 1 | 1,125 | 1,266 | 1,424 |

| note | DO$_1$ | RÉ$_1$ | M1$_1$ | FA$_2$ |
|---|---|---|---|---|
| fréquence | 3/2 | 27/16 | 243/128 | 2 |
| valeur approchée | 1,5 | 1,687 | 1,898 | 2 |

Le calcul des rapports des fréquences de deux notes successives donne

9/8 ; 9/8 ; 9/8 ; 256/243 ; 9/8 ; 9/8 ; 256/243.

On remarque qu'il n'y a que deux types d'intervalles, ce qui fait qu'une représentation sur échelle logarithmique suivante aura l'allure suivante :




## TROISIÈME QUESTION

### a) Quatre quintes au-dessus de FA

Si on remarque que : 1 dièse + 1 quinte = 1 quinte + 1 dièse, on peut ajouter les quatre quintes à FA, et les dièses ensuite ; on trouve donc : DO # ; SOL # ; RE # et LA #.

### b) La cinquième quinte après FA :

De la même façon qu'au a), ajoutons d'abord cinq quintes à FA et diésons ensuite : on obtient MI # dont la fréquence est $\frac{243}{128} \times \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{3^{12}}{2^{18}} \approx 2{,}03$.

Divisons-la par 2 pour être entre 1 et 2 il vient $\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1{,}0136$.

**MI # se place donc entre FA et FA #**, la note la plus proche étant FA. Le dièse est donc plus grand que le demi-ton.

**c) Valeur du comma pythagoricien :**

L'intervalle de douze quintes est un rapport $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}}$ . L'intervalle de 7 octaves est un rapport $2^7$.

La « différence » entre les deux est le rapport $\frac{3^{12}}{2^{12}} : 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1{,}0136 \neq 1$. Il n'y a pas égalité.

Or la « différence » entre un dièse et un demi-ton est donnée par la division $\frac{3^7}{2^{11}} : \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$.

On a bien : $\boxed{\text{12 quintes – 7 octaves = 1 dièse – 1 demi-ton}}$.

**d) Comparaison des quintes et des octaves**

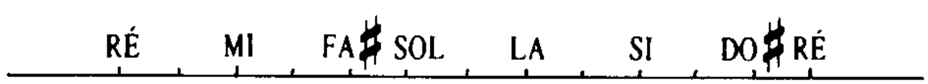
Une puissance de 3 est impaire ; une puissance de 2, paire : il ne peut jamais y avoir égalité !

Or une égalité du type *n* quintes = *p* octaves signifie $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^p$ soit : $3^n = 2^{n+p}$ .

Ce qui est impossible. Une telle égalité n'a donc jamais lieu.

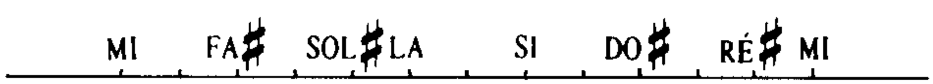
## QUATRIÈME QUESTION

**a) Altérations de la gamme de RÉ :**




La « grille » de la gamme de DO (appliquée à la gamme de RÉ) donne deux altérations : FA et DO.

**b) Altérations de la gamme de MI :**




Il y a cette fois quatre altérations : FA, SOL, DO et RÉ.

## CINQUIÈME QUESTION (gamme de Zarlino)

**Intervalle de quarte.**

(FA, LA DO) est un accord parfait ; DO est donc une quinte au-dessus de FA ; le rapport $\frac{FA}{DO}$ vaut donc $\frac{2}{3}$ (inverse de $\frac{3}{2}$) ; le FA dont la fréquence est entre 1 et 2 est une octave au-dessus soit 4/3.

**L'intervalle de quarte de Zarlino vaut 4/3.**

**Intervalle de sixte.**

(FA, LA, DO) est un accord parfait ; LA est la tierce de FA ;

sa fréquence est donc 5/4 x 4/3 = 5/3

**L'intervalle de sixte vaut donc 5/3*.***

## SIXIÈME QUESTION

### a) Comparaison de LA # et SI $b$

Il y a un ton majeur entre LA et SI. Or un ton majeur se décompose en un dièse plus un comma « plus » un bémol ; LA # et SI $b$ diffèrent juste d'un comma : on peut les confondre.

### b) Un intervalle qui est son propre renversement

Le rapport $x$ d'un tel intervalle serait tel que $\frac{2}{x} = x$ soit $x = \sqrt{2}$ .

Cette valeur n'est pas dans la gamme de Zarlino. Approchons $\sqrt{2}$ à un comma près ; on cherche alors un rapport dans l'intervalle $\left[\frac{80}{81}\sqrt{2};\frac{81}{80}\sqrt{2}\right]$ soit à peu près : [1,397 ; 1,432].

On est donc entre la quarte et la quinte, de rapports 1,333 et 1,5. Par exemple, si DO est la fondamentale, on est entre FA et SOL.

FA # « vaut » $\frac{4}{3}\times\frac{16}{15}=\frac{64}{45}\approx 1{,}422$ et SOL $b$ « vaut » $\frac{3}{2}\times\frac{24}{25}=\frac{36}{25}\approx 1{,}440$ .

**FA # est donc à moins d'un comma de l'intervalle idéal $\sqrt{2}$ .**

### c) Le problème des transpositions

Une valeur plus simple est proche de $\sqrt{2}$ : c'est 1,4 soit 7/5 qu'on va adopter sous la dénomination de «quinte diminuée», et confondre avec FA #.

Calculons les fréquences de la gamme de RÉ (par multiplication par 9/8).

| fréquence | 9/8 | *6/5* | 81/64 | 27/20 | 45/32 | 3/2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| valeur théorique | 9/8 | 6/5 | 5/4 | 4/3 | 7/5 | 3/2 |
| rapport | 1 | 1 | 81/80 | 81/80 | 225/224 | 1 |
| commas | 0 | 0 | 1 | 1 | <1 | 0 |

| fréquence | 63/40 | 27/16 | 9/5 | 15/8 | 81/40 | 135/64 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| valeur théorique | 8/5 | 5/3 | 9/5 | 15/8 | 2 | 32/15 |
| rapport | 63/64 | 81/80 | 1 | 1 | 81/80 | 2025/2048 |
| commas | >1 | 1 | 0 | 0 | 1 | <1 |

Une valeur est trop différente de la valeur théorique : la quinte diminuée.

Faisons les mêmes calculs pour la gamme de MI.

| fréquence | 5/4 | 4/3 | 45/32 | 3/2 | 25/16 | 5/3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| valeur théorique | 5/4 | 4/3 | 7/5 | 3/2 | 8/5 | 5/3 |
| rapport | 1 | 1 | 225/224 | 1 | 125/128 | 1 |
| différence en commas | 0 | 0 | <1 | 0 | ≈ 2 | 0 |

| fréquence | 7/4 | 15/8 | 2 | 25/12 | 9/4 | 75/32 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| valeur théorique | 9/5 | 15/8 | 2 | 32/15 | 9/4 | 12/5 |
| rapport | 35/36 | 1 | 1 | 375/384 | 1 | 375/384 |
| différence en commas | ≈ 2 | 0 | 0 | ≈ 2 | 0 | ≈ 2 |

La situation est bien plus mauvaise ici : quatre notes ont deux commas d'écart avec leur valeur théorique la ?, la quinte diminuée (encore elle !), la sixte et la septième.

**La gamme de Zarlino se prête mal aux transpositions.**

## SEPTIÈME QUESTION (gamme tempérée)

Ici l'intervalle de quinte vaut $2^{\frac{7}{12}}$ : douze quintes successives correspondront donc aux puissances de 2 suivantes :

$$\frac{7}{12};\ \frac{14}{12};\ \frac{21}{12};\ \frac{28}{12};\ \frac{35}{12};\ \frac{42}{12}\ ;\ \frac{49}{12};\ \frac{56}{12};\ \frac{63}{12};\ \frac{70}{12};\ \frac{77}{12};\ \frac{84}{12}.$$

On se ramène à un nombre entre 0 et 1 (car $2^0 = 1$ et $2^1 = 2$) en soustrayant le plus grand entier possible aux exposants ci-dessus. Il vient :

$$\frac{7}{12};\ \frac{2}{12};\ \frac{9}{12};\ \frac{4}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{6}{12}\ ;\ \frac{1}{12};\ \frac{8}{12};\ \frac{3}{12};\ \frac{10}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{0}{12}.$$

On retrouve exactement toutes les puissances de 2 de la gamme tempérée !

On aurait aussi bien pu raisonner avec la « spirale des notes » puisque multiplier par $2^{\frac{7}{12}}$ « avance » de sept cases sur les douze qui forment un tour.