



Activité : Musique, guitare et suite.¹

En déplaçant, de haut en bas, le doigt sur le manche d'une guitare et en faisant vibrer la corde, on obtient une note de plus en plus aigüe. La longueur de la corde qui pourra vibrer est celle comprise entre la frette (barre métallique sur le manche) située en dessous du doigt et le chevalet. Plus la fréquence de vibration est élevée, plus la note est aigüe car la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur de la corde. Les frettes sont donc placés sur le manche de la guitare de façon que les notes "sonnent" justes. On se propose d'étudier cette disposition.

1. On a mesuré, sur le manche d'une guitare, les distances, en mm, de chaque frette au chevalet et obtenu le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
d_n	645	610	576	544	513	485	457	431	406	382	360	340	321	304	287	270	255	241	227	214

Calculer les rapports $\frac{d_0}{d_1}, \frac{d_1}{d_2}, \dots, \frac{d_i}{d_{i+1}}, \dots, \frac{d_{18}}{d_{19}}$. Que constate-t-on ? Calculer la valeur moyenne m de ces rapports.

- a) Calculer les rapports $\frac{d_0}{d_{12}}, \frac{d_1}{d_{13}}, \dots, \frac{d_i}{d_{i+12}}, \dots, \frac{d_7}{d_{19}}$. Que constate-t-on ?

Vérifier que $m^{12} \approx 2$.

Explication des résultats trouvés :

Si la longueur d'une corde vibrante est divisée par deux alors cette corde vibre un octave au-dessus (on passe ainsi par exemple du Ré3 grave de l'octave 3 au Ré4 de l'octave 4).

Un octave est subdivisé en 12 demi-tons dans la gamme tempérée (Do, Do#, Ré, MiI, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, SiI, Si, Do). Le rapport² de fréquence est donc le même entre chaque

demi-ton. On comprend ainsi pourquoi les rapports $\frac{d_0}{d_1}, \frac{d_1}{d_2}, \dots, \frac{d_i}{d_{i+1}}, \dots, \frac{d_{18}}{d_{19}}$ sont égaux et

que les rapports $\frac{d_0}{d_{12}}, \frac{d_1}{d_{13}}, \dots, \frac{d_i}{d_{i+12}}, \dots, \frac{d_7}{d_{19}}$ sont proches de deux puisque l'on joue des

notes distantes d'une octave. Les nombres $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{19}$ sont donc les termes

consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$.

¹ D'après une idée de Bernard PARZYSZ in Musique et Mathématiques, publication n°53 de l'APMEP, janvier 1984 pages 51-52

² L'oreille ne sait distinguer que les rapports de fréquence, en effet, elle est peu sensible aux différences de fréquences.

b) Calculer les longueurs théoriques $d'_0, d'_1, d'_2, \dots, d'_{19}$ en arrondissant au millimètre le plus proche. Comparer avec les valeurs mesurées $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{19}$. La guitare étudiée est-elle « juste » ?

2. La fréquence est inversement proportionnelle à la longueur de la corde. Si la longueur de la corde est divisée par deux, la fréquence est multipliée par deux.

Notons $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{12}$ la suite des fréquences des douze demi-tons de la gamme tempérée à l'octave 3. Quel lien existe-t-il entre elles ?

- a) Sachant que la fréquence du La3 (octave 3) a été fixée à 440 Hz, trouver les fréquences des 12 notes de l'octave 3 de la gamme tempérée.
- b) On sait que la fréquence du Ré2 (octave 2) est de 147 Hz, trouver les fréquences des 12 notes de l'octave 2.
- c) Vérifier les compatibilités entre les deux octaves.