ÉCOUTEZ LEUR DIFFÉRENCE ![1]

D'OU PROVIENNENT- ILS ?

Fréquence des notes selon les époques...

	Pythagore	Physiciens modernes	Mathématiciens du XVI^e
DO	256	256	256
RÉ	288	288	287,4
MI	324	320	322,5
FA	341,3	341,3	341,7
SOL	384	384	383,6
LA	432	426,6	430,6
SI	486	480	483,3
DO	512	512	512

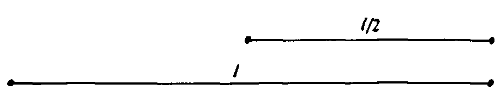
Ces chiffres ne sont pas le fruit de l'expérience...

Le but de cette activité est l'étude des notes de musique et de leurs rapports ; comment l'homme a été amené à inventer des «gammes», comment ces «gammes» ont été modifiées au fur et à mesure que les connaissances scientifiques s'étendaient.

A. NOTION DE FRÉQUENCE

Parmi les premiers instruments utilisés figurent les instruments à cordes, dont un représentant actuel est la guitare : on pince une corde, la corde émet un son.

Si on pose le doigt au milieu de la corde, et si on pince une des parties de celle-ci, on obtient un son, différent du premier : il est plus aigu.



Tout se passe comme si on avait une corde deux fois plus petite : on peut comparer les deux sons si on a deux cordes, l'une de longueur *l* et l'autre de longueur *l*/2. On dit que le deuxième son est deux fois plus aigu que le premier, car il provient d'une corde deux fois plus petite.

Si on pose le doigt ailleurs qu'au milieu de la corde de longueur *l*, on obtient d'autres sons, intermédiaires entre les deux ci-dessus.
En d'autres termes la hauteur d'un son (c'est-à-dire sa qualité d'être plus aigu ou plus grave) varie avec la longueur de la corde qui le produit.
C'est d'ailleurs comme cela qu'on va mesurer la hauteur d'un son, ou comparer les hauteurs de deux sons, en comparant les longueurs des cordes correspondantes.

[1] Tiré de l'ouvrage « Les maths au jour le jour » de Jacques Lubczanski paru en octobre 1985 aux éditions Cédic/Nathan et retranscrit avec l'aimable autorisation de l'auteur.

Pour ceux qui sont plus familiers avec une guitare ou tout instrument à cordes, je précise que d'autres facteurs que la longueur interviennent dans la hauteur d'un son, en particulier la grosseur et la tension (ce qui permet d'« accorder » l'instrument).
Donc pour mesurer scientifiquement un son, on va mesurer la longueur de la corde qui le produit. Mais il se trouve que, pour des raisons pratiques, l'oreille humaine sait comparer deux sons entre eux, et ceci avec une grande finesse, mais ne sait pas juger précisément la hauteur d'un son seul : si on nous fait écouter deux sons ensemble, ou l'un après l'autre, vous distinguez facilement le plus grave et le plus aigu. Mais si vous entendez une note seule, vous aurez du mal à dire si c'est un do, un ré ou une autre note.
C'est pourquoi tout au long de cette activité, on va supposer qu'on dispose d'un son de base, d'une note fondamentale, qu'on peut écouter quand on veut pour la comparer à un autre son. Par exemple, on pourrait prendre la tonalité du téléphone, qu'on décrocherait dès qu'on voudrait une note de référence.
Or il se trouve que, dans l'ancien temps, le téléphone n'était pas aussi courant que de nos jours : les hommes ont donc commencé, non pas par mesurer les hauteurs des sons produits par leurs instruments, mais par les comparer entre elles.
Par exemple, si leur note de référence était produite par une corde de longueur l celle produite par la corde longueur de $\frac{l}{2}$ était (et est encore) dite UNE OCTAVE au-dessus de la première.
L'octave, c'est un intervalle entre les deux notes, ou plutôt un rapport de longueurs : peu importe que la note de référence soit plus grave ou plus aiguë, le son produit avec une corde deux fois plus courte est une octave au-dessus de l'autre.

Le rapport des longueurs est $\frac{1}{2}$; le rapport des FRÉQUENCES est $\frac{2}{1}$ car les fréquences vont être des grandeurs variant à l'inverse des longueurs : si la longueur est trois fois plus petite, la fréquence sera trois fois plus grande.
Plus un son est aigu, plus la longueur est petite et plus la fréquence est grande. Plus un son est grave, plus sa fréquence est petite.
La fréquence, c'est la grandeur qui mesure la hauteur des sons (comme par exemple la longueur est la grandeur qui mesure l'éloignement des points).

Définition :

Un son S_1 est dit une octave au-dessus d'un son S_2 si le rapport $\frac{fréquence \quad de \quad S_1}{fréquence \quad de \quad S_2}$ vaut 2 c'est-à-dire si la fréquence de S_1 est deux fois la fréquence de S_2.

En résumé :

Il va y avoir une famille de sons qui vibrent à l'unisson d'un son de fréquence f : ce sont les sons de fréquence $2^n \times f$ où n est un entier positif ou négatif.

A toute cette famille, on a donné un seul nom : par exemple la famille des sons à l'unisson de la tonalité du téléphone s'appelle LA. Ses membres sont des notes qui sont toutes des la :

la tonalité du téléphone est la note la_3
une octave au-dessus on a la note la_4
une octave en dessous on a la note la_2, etc.

On pourrait en théorie dire qu'il y a une infinité de la de plus en plus aigus et une infinité de la de plus en plus graves. Mais l'oreille humaine a ses limites et ne peut guère entendre plus de 7 ou 8 octaves.

Au-dessus ou en dessous, les sons sont inaudibles (infrasons et ultrasons).
Si vous avez déjà prêté attention aux publicités pour les chaînes haute fidélité, vous avez peut-être remarqué dans les caractéristiques :
« Bande passante : 20 à 20000 Hz » par exemple ; cela signifie que l'appareil produit des sons dont la fréquence va de 20 à 20000 hertz. Le hertz (en abrégé Hz) est l'unité de fréquence.
Par exemple le la$_3$ (tonalité du téléphone) a une fréquence d'à peu près 435 Hz. Il s'ensuit que la fréquence du la$_4$ est 870 Hz, celle du la$_2$: 217,5 Hz...
L'étendue des hauteurs de sons que l'oreille humaine peut percevoir varie selon les individus : cela peut varier de 15 Hz à 38000 Hz, pour un individu vivant dans un milieu calme à... beaucoup moins pour un citadin !

Première question

a) Calculer la fréquence du la$_8$; est-il audible ?
b) Calculer la fréquence du la$_o$; est-il audible ?
c) Combien y a-t-il d'octaves entières entre 15 et 38000Hz ?
d) Quel est le la dont la fréquence est entre 7,5 et 15 Hz ?

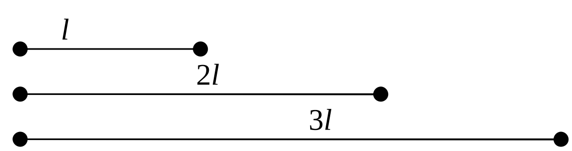
B. L'INTERVALLE DE QUINTE ET LES GAMMES HARMONIQUES

L'octave, c'était une belle trouvaille, mais faire sonner ensemble des notes qu'on ne distingue pas, ça ne faisait pas vraiment de la musique : imaginez une mélodie où il n'y aurait que des la par exemple !

D'ailleurs vous avez tous entendu parler des do ; des ré, etc. et autres mi, fa... c'est donc bien qu'on les a trouvés quelque part.

C'est la découverte de la QUINTE qui est à l'origine des premières gammes :

Voici trois cordes, de longueurs *l*, 2*l* et 3*l*.



Si *f* est la fréquence du son produit par la corde *b* de longueur 2*l*, la fréquence du son de la première corde *a* de longueur *l* est 2*f* (un octave au-dessus).

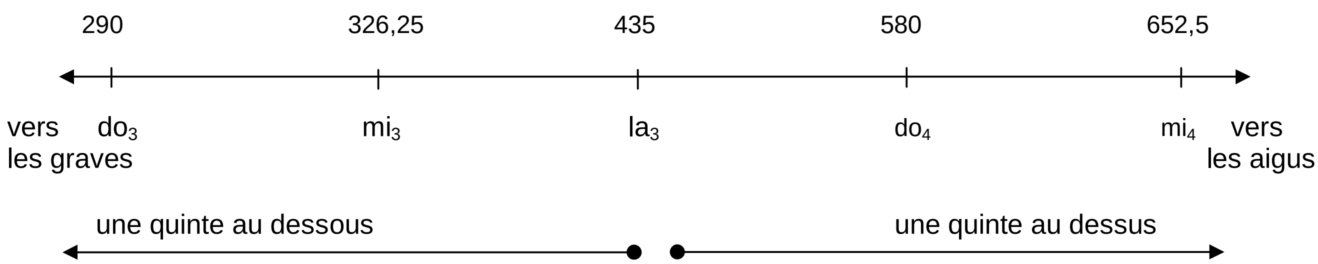
Et la fréquence du son de la troisième corde *c* de longueur 3*l* ? le rapport des longueurs est $\frac{2l}{3l} = \frac{2}{3}$. Celui des fréquences sera donc $\frac{3}{2}$. La fréquence de la troisième corde *c* est $\frac{2}{3} f$.

Le son produit par *b* est dit une QUINTE au-dessus de celui produit par *c.* Et il se trouve que ces trois cordes vibrent ensemble de façon agréable à l'oreille humaine : on dit : EN HARMONIE.

Définition

> Un son S_1 est dit une quinte au-dessus d'un son S_2 si le rapport $\frac{fréquence \quad de \quad S_1}{fréquence \quad de \quad S_2}$ vaut $\frac{3}{2}$
> c'est-à-dire si la fréquence de S_2 est 1,5 fois la fréquence de S_1.

Par exemple, une quinte au-dessus du la_3 retrouve $\frac{3}{2} \times 435 = 652{,}5 \text{ Hz}$ qui s'appelle mi_4. Et mi_3 a pour fréquence 326,25 Hz. Et une quinte en dessous du la_3 se trouve $\frac{2}{3} \times 435 = 290 \text{ Hz}$ qui s'appelle do_3 ; et do_4 a pour fréquence 580 Hz.



Seulement voilà : si les Anciens ont découvert l'octave et la quinte, les hertz, par contre, c'est une invention récente. Alors nous allons faire une démarche analogue à celle qu'ont dû faire les hommes dans les civilisations antiques.

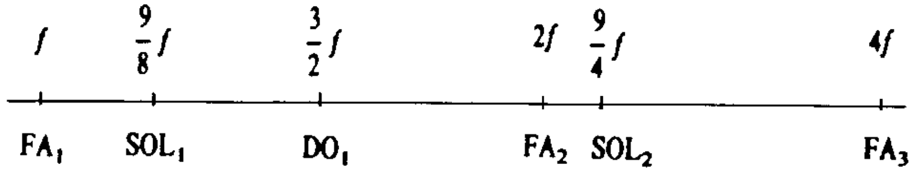
Nous allons partir d'un son de référence, dit « fondamental » dont la fréquence *f* est inconnue, et nous allons chercher quels sons seront susceptibles d'être à l'unisson ou en harmonie avec le son fondamental. Ce son fondamental, donnons-lui un nom : FA_1 de fréquence *f*. On sait déjà que tous les sons de fréquence $2^n f$ sont à l'unisson ; ce sont des fa. On vient d'apprendre que le son une quinte au-dessus de FA_1 est dans l'harmonie et que sa fréquence est $\frac{3}{2} f$. Donnons-lui un nom : DO ; comme $\frac{3}{2} f$ est entre *f* et 2*f*, ce DO est entre FA_1 et FA_2 : c'est donc DO_1.

L'étape suivante consiste à penser que la note située une quinte au-dessus de DO_1 va être encore dans l'harmonie.

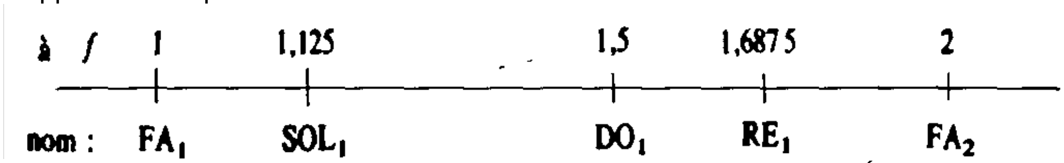
Sa fréquence est $\frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2} f \right) = \frac{9}{4} f$. Donnons-lui un nom : SOL ; $\frac{9}{4} = 2{,}25$ donc

$2f < \frac{9}{4} f < 4f$

Comme il est entre FA_2 et FA_3, c'est SOL_2 ; si on veut se ramener à l'octave entre FA_1 et FA_2 il faut prendre le son une octave en dessous de SOL_2 c'est-à-dire SOL_1 : sa fréquence est $\frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} f \right) = \frac{9}{8} f = 1{,}125 f$.



Ajoutons une quinte à SOL_1 : $\frac{3}{2}\times\frac{9}{8}f=\frac{27}{16}f=1{,}6875f$. Donnons-lui un nom RÉ et même $RÉ_1$ puisqu'il est entre FA_1 et FA_2.
Rapport des fréquences à *f* :



A l'intérieur d'une octave, on a déjà trouvé 4 notes : FA, SOL, DO et RÉ. Il a suffi à chaque fois d'ajouter une quinte (c'est-à-dire de multiplier la fréquence par $\frac{3}{2}$) et de retirer éventuellement une ou plusieurs octaves (c'est à dire diviser la fréquence par 2 ou 4 ,...) pour trouver une nouvelle note entre FA_1 et FA_2.

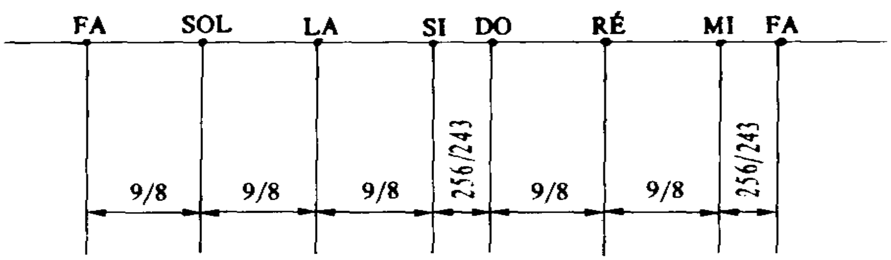
Deuxième question

a) Sachant qu'une quinte au-dessus de RÉ on a LA, calculer la fréquence de LA_1.
b) Sachant qu'une quinte au-dessus de LA on a MI, calculer la fréquence de MI_1.
c) Sachant qu une quinte au-dessus de MI on *a* SI, calculer la fréquence de SI_1.
d) Représenter sur un axe les notes FA_1, SOL_1, LA_1, SI_1, $D0_1$, $RÉ_1$, $M1_1$ et FA_2 en indiquant le rapport de leur fréquence à celle de FA_1 qui est *f.*
   Calculer les rapports des fréquences de deux notes successives (c'est-à-dire FA_1 et SOL_1, SOL_1 et LA_1, etc.), la plus aiguë sur la plus grave. Que remarquez-vous? (Calculer avec des FRACTIONS pas avec des décimaux).

On a donc obtenu une échelle de sept notes : *fa*, *sol*, *la, si, do*, *ré et mi ;* cela s'appelle une gamme harmonique. Celle-ci est la gamme de Pythagore utilisée déjà dans l 'Antiquité et au Moyen Age en Occident. D'autres gammes harmoniques, mais ne comportant que quatre ou cinq quintes successives (contre six pour celle de Pythagore), et donc cinq ou six notes, ont été utilisées par différentes civilisations (Chine, Amérique du Sud, ...).
Dans la gamme obtenue ici les rapports des fréquences de chaque note à la fréquence de la fondamentale (FA) sont des fractions où le numérateur est une puissance de 3 et le dénominateur une puissance de 2 :

$$\text{FA : 1, SOL : }\frac{3^2}{2^3}\text{, LA : }\frac{3^4}{2^6}\text{, etc.}$$

Ceci étant dû aux multiplications successives par $\frac{3}{2}$ et aux éventuelles divisions successives par 2.
On verra qu'il n'en est pas de même dans les deux autres gammes utilisées en Occident.
Toujours dans la gamme de Pythagore, si on mesure les intervalles entre deux notes successives, et ce, en faisant le rapport de leurs fréquences, on obtient deux valeurs possibles : $\frac{3}{2}$ ou $\frac{256}{243}$:



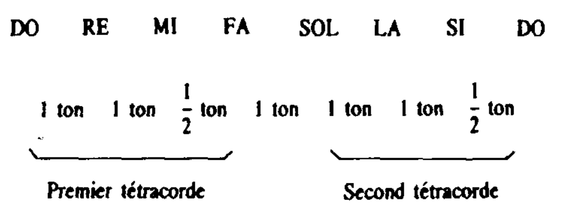
Le fait que les intervalles se mesurent par un rapport de fréquences est dû à la sensibilité particulière de l'oreille humaine (sensibilité logarithmique).

L'intervalle correspondant au rapport $\frac{9}{8}$ s'appelle un ton **pythagoricie**n, celui correspondant à $\frac{256}{243}$ s'appelle un **demi-ton pythagoricien**.

Malheureusement un demi-ton n'est pas la moitié d'un ton ! En effet si par exemple vous ajoutez deux demi-tons, c'est-à-dire si vous multipliez une fréquence deux fois par $\frac{256}{243}$ vous n'obtenez pas la même qu'en la multipliant par $\frac{9}{8}$ c'est-à-dire en lui ajoutant un ton :

$\frac{256}{243}\times\frac{256}{243}\approx 1{,}106$ alors que $\frac{9}{8}=1{,}125$.

La dénomination de « demi-ton » est donc, stricto sensu, une approximation. La gamme Pythagoricienne possède une remarquable symétrie, en deux tétracordes égaux, si on part de DO :

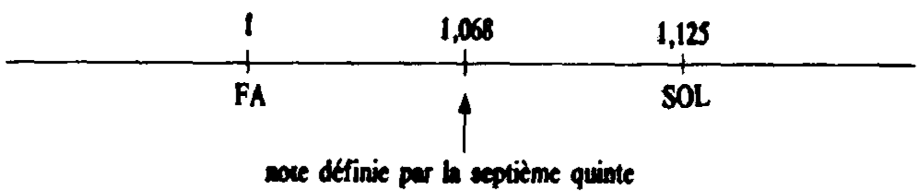


C. ENCORE LA QUINTE ! LES GAMMES CHROMATIQUES

La gamme de Pythagore a été introduite en Occident par un moine, Guy d'Arezzo (996-1080) ; si celui-ci s'est arrêté à la sixième quinte c'est sans doute que sept notes suffisaient à la musique de l'époque et aussi parce que ces sept notes ont entre elles des rapports « harmoniques », du moins pour une oreille européenne et qu'il n'en est pas de même pour la septième quinte.

Si on ajoute à SI_1, de fréquence $\frac{3^6}{2^9}f$, une quinte on trouve le son de fréquence

$\frac{3}{2}\times\frac{3^6}{2^9}f=\frac{3^7}{2^{10}}f$. Or $\frac{3^7}{2^{10}}\approx 2{,}136$: on descend d'une octave pour se retrouver entre 1 et 2 c'est-à-dire entre FA_1 et FA_2. On trouve donc pour cette nouvelle note la fréquence $\frac{1}{2}\times\frac{3^7}{2^{10}}f=\frac{3^7}{2^{11}}f=1{,}068f$ ce qui place cette note entre FA_1 et SOL_1.



Cette note « sonne »» moins bien avec les autres, mais pas de façon définitive : l'oreille en effet, comme les autres sens s'éduque et s'affine et donc on a pu admettre la nouvelle note dans la gamme. On lui donne le nom de Fa dièse noté Fa # , ce qui signifie Fa augmenté d'un dièse en d'autres termes cela revient à définir, après l'octave et la quinte, un nouvel intervalle : **le dièse**.

Définition :

Un son S_1 est dit un dièse au-dessus d'un son S_2 si le rapport $\dfrac{fréquence\ de\ S_1}{fréquence\ de\ S_2}$ vaut $\dfrac{3^7}{2^{11}} = \dfrac{2187}{2048}$

Cette définition semble plus compliquée que les deux précédentes mais en fait elle en découle simplement puisque :

7 quintes = 4 octaves + 1 dièse.

En effet après 7 quintes, on a multiplié la fréquence par $\left(\dfrac{3}{2}\right)^7 = \dfrac{3^7}{2^7}$ et qu'il a fallu redescendre de 4 octaves pour « tomber » entre FA_1 et FA_2 : $\dfrac{3^7}{2^7} \times \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{3^7}{2^{11}} \approx 1{,}068$,

soit 7 quintes - 4 octaves = 1 dièse. Ce qui revient bien au même. Le dièse n'est plus un rapport « harmonique ». On dit qu'il est « chromatique ».

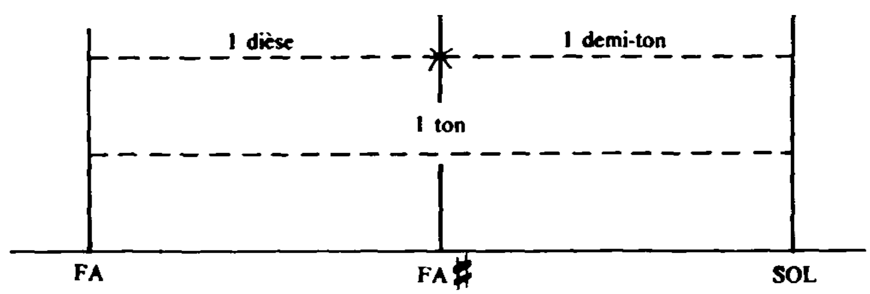
D'autre part, **le dièse est différent du demi-ton** car $\dfrac{3^7}{2^{11}} \neq \dfrac{2^8}{3^5} = \dfrac{256}{243}$ et l'oreille humaine est capable de faire la différence ! $1{,}068 \neq 1{,}053$. Nous en reparlerons plus loin.

Par contre si dièse et demi-ton sont différents, on peut dire pourtant qu'ils sont complémentaires. Ajoutons à une note un dièse puis un demi-ton. On multiplie sa fréquence par $\dfrac{3^7}{2^{11}}$ puis par $\dfrac{2^8}{3^5}$, donc au total par $\dfrac{3^7}{2^{11}} \times \dfrac{2^8}{3^5} = \dfrac{3^2}{2^3} = \dfrac{9}{8}$ après simplification.

On lui a donc tout simplement ajouté 1 ton. On peut écrire

1 dièse + 1 demi-ton = 1 demi-ton + 1 dièse = 1 ton

et dessiner :



Troisième question

(Vous pouvez vous aider de la spirale des notes p. 8)

a) A partir de FA # ajoutez successivement 4 quintes et donnez un nom, que vous justifierez, aux quatre notes obtenues.

b) Calculer la fréquence de la note obtenue 5 quintes après FA # soit 11 quintes après FA : exprimer sous forme de fraction le résultat obtenu.
Montrer que cette nouvelle note peut s'appeler MI #. Où se place-t-elle dans la gamme? Quelle est la note la plus proche ?

c) Montrer que l'égalité 12 quintes = 7 octaves est fausse. Montrer que la différence entre 12 quintes et 7 octaves est la même qu'entre un dièse et un demi-ton.

Cette différence s'appelle comma pythagoricien ; c'est un intervalle très faible mais une oreille exercée peut le déceler. En pratique, si on considère le comma comme une quantité négligeable, le dièse et le demi-ton se rejoignent, et on assimile 12 quintes à 7 octaves : alors la douzième quinte est confondue avec la note de départ. On a la **gamme chromatique** comportant douze notes du FA_1 au FA_2 :

FA FA # SOL LA LA # SI DO DO # RE RE # MI

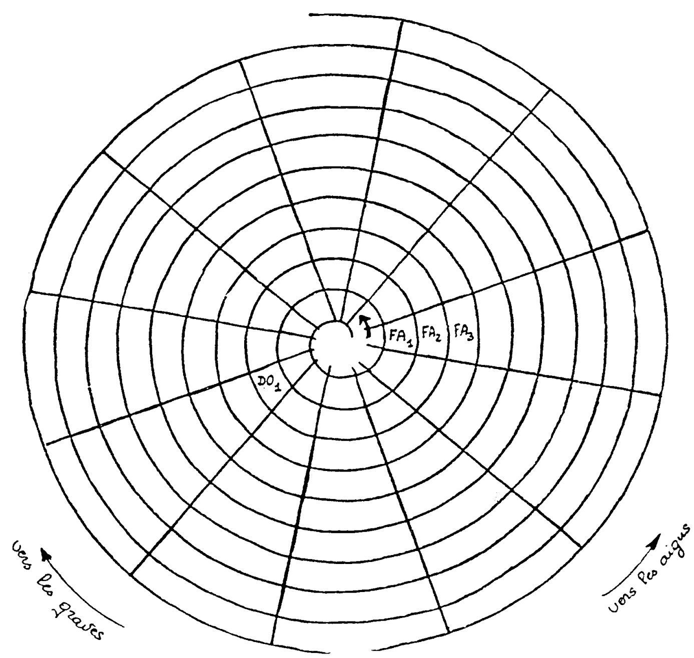
le MI #; est confondu avec le FA ; le SI # avec le DO.
Si en revanche, on tient compte du comma comme intervalle, la douzième quinte est MI #, qui est différent de FA, et on peut continuer à ajouter des quintes successives : on arrive alors a des « doubles dièses », puis « triples dièses », etc., sans jamais retomber sur de s notes déjà connues.

d) Montrer qu'une puissance de 3 (c'est-à-dire un nombre de la forme 3^n) ne peut être une puissance de 2 (c'est-à-dire un nombre de la forme 2^k*).* En déduire que quel que soit le nombre *n* de quintes qu'on ajoute, on n'obtient jamais un nombre entier d'octaves. En d'autres termes qu'aucune égalité :

n quintes = p octaves

(n et p entiers) n'est juste. Ceci fait que la gamme chromatique à 12 notes en particulier ne peut pas être « rigoureusement exacte » au sens mathématique.

LA SPIRALE DES NOTES
OU COMMENT CONSTRUIRE LA GAMME CHROMATIQUE



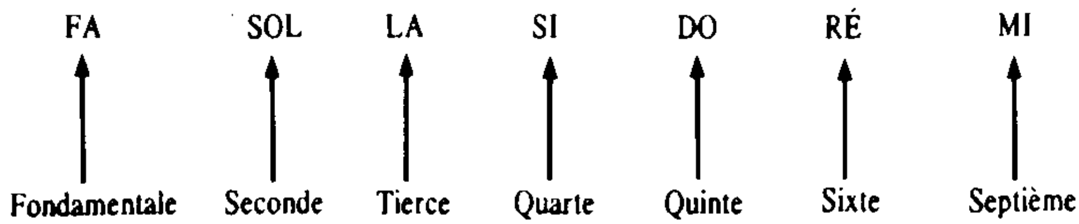
Suivez la spirale comme un jeu de l'oie.

En avançant de sept cases, vous ajoutez une quinte.
En avançant de douze cases, vous ajoutez une octave et vous avez juste fait un tour.

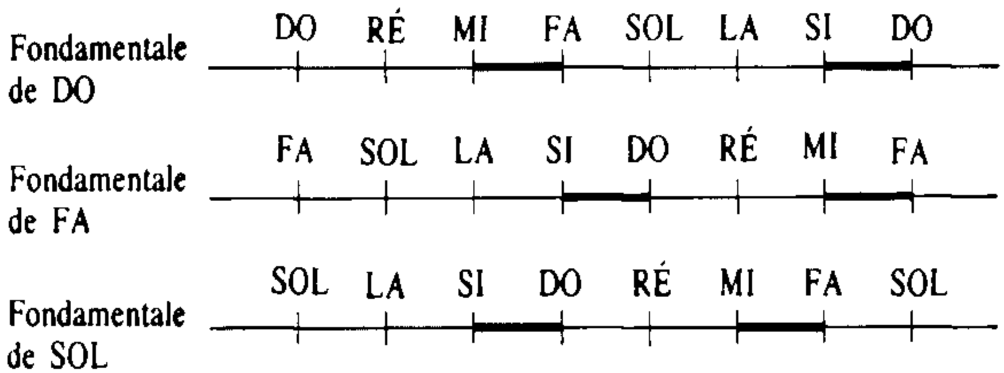
Remplissez la spirale dans l'ordre des douze quintes successives, les notes se placeront d'elles-mêmes au bon endroit !
D'abord les sept notes de la gamme harmonique (les six premières quintes). Puis les cinq autres notes de la gamme chromatique (les cinq quintes suivantes). Voici l'ordre dans lequel elles arrivent : FA, DO, SOL, RÉ, LA, MI, SI…

D. LE PROBLÈME DES TRANSPOSITIONS

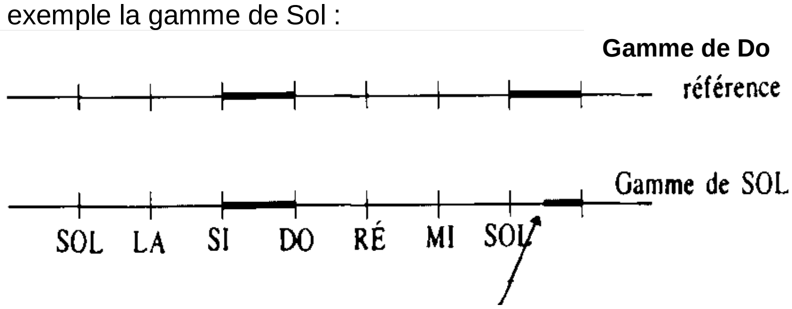
Au passage, il faut signaler que les noms d'octave et de quinte sont postérieurs à l'invention de la gamme de Pythagore : ils proviennent du rang des notes à l'intérieur de la gamme harmonique.
Partant de la note de base, une octave plus haut est la huitième *(octavus* en latin).
Partant de la note de base, une quinte plus haut est la cinquième *(quintus* en latin).
D'ailleurs les autres notes ont également reçu des noms :
Si Fa est la note de base



Ces noms ne sont que la traduction (latine) de leur position dans la gamme ; ils peuvent être utilisés aussi si la note de base (fondamentale) est quelconque.
Par exemple : la tierce de Do est Mi (Mi est la troisième si on part de Do) ; la septième de Do est Si (Si est la septième note si on part de Do) ; ou encore la quinte de Sol est Ré (Ré est la cinquième note si on part de Sol) etc.
Mais il faut remarquer que selon la note de laquelle on part, les intervalles successifs entre les notes changent, l'ordre des tons et des demi-tons est modifié :



Si donc on veut garder la structure symétrique des deux tétracordes de la gamme de Do (c'est-à-dire la gamme de fondamentale Do), il faut modifier certaines notes, en utilisant les notes diésées de la gamme chromatique et en négligeant le comma.
Prenons par exemple la gamme de Sol :



On est amené à **altérer** le Fa. **Fa # au lieu de Fa** pour qu'il y ait un ton entre la sixte et la septième et un demi-ton entre la septième et l'octave (à un comma près).
On dit que dans la gamme de Sol il y a une altération.

Quatrième question

a) Quelles sont les altérations de la gamme de Ré, si on veut que la position des tons et des demi-tons soit la même que dans la gamme de Do ?
b) Même question pour la gamme de Mi.

Changer de fondamentale en conservant la position des tons et des demi-tons, c'est-à-dire sans changer la structure de la gamme, cela s'appelle TRANSPOSER. Dans la gamme de Pythagore les transpositions exigent l'altération de certaines notes.

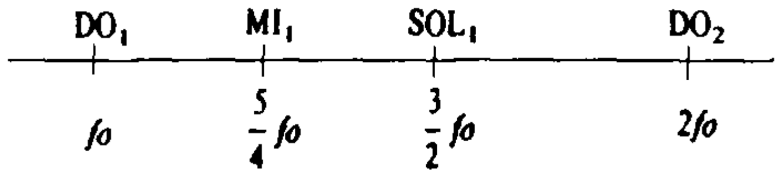
E. LES LOIS DE LA PHYSIQUE

La gamme de Pythagore, qu'on vient d'étudier, n'est utilisée de nos jours que par les instruments qui s'accordent « à la quinte ». C'est par exemple le cas du violon, où chaque corde est mise une quinte au-dessus de la précédente.
Deux autres gammes ont vu le jour en Occident depuis. Au XVI^e^ siècle, la gamme de Zarlino puis un siècle plus tard, la gamme tempérée. Tout d'abord, voyons quelles considérations ont mené à la gamme de Zarlino.
L'expérience des instruments de musique a montré que, placé à côté d'un son de fréquence f_0, le son de fréquence $2f_0$ vibre à l'unisson : il est une octave plus haut.
Le son de fréquence $3f_0$ est une quinte au-dessus du précédent.
Le son de fréquence $4f_0$ est deux octaves au-dessus du son initial.
En physique les vibrations de fréquence $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$, etc. s'appellent les harmoniques de la fréquence f_0 : elles doivent ce nom au fait suivant : si on pince une corde « accordée » à la fréquence f_0 à côté des cordes de fréquence $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$, etc, ces dernières se mettent à vibrer toutes seules, par « sympathie » : ce phénomène s'appelle la « résonance ». C'est le même phénomène qui fait vibrer vos carreaux au passage d'un poids lourd devant la maison. Au XVI^e^ siècle, les poids lourds n'étaient pas nombreux (et les carreaux aux fenêtres non plus !), mais cela n'a pas empêché de découvrir le phénomène sur les instruments à cordes de l'époque.
En particulier, la fréquence 5 f_0 est aussi une harmonique de f_0, représentée dans l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ par la fréquence $\frac{5}{4}f_0$ située deux octaves en dessous.
Et la découverte du XVI^e^ siècle, c'est l'ACCORD PARFAIT MAJEUR. Les trois fréquences f_0, $\frac{5}{4}f_0$ et $\frac{3}{2}f_0$ vibrant ensemble sont du plus bel effet ; et s'il suffît de pincer une de ces trois cordes pour mettre les deux autres en vibration c'est encore plus beau quand on les pince toutes ensemble.
C'est à partir de cet « accord parfait majeur » qu'on va construire la gamme de Zarlino.
On ne va donc garder de la gamme de Pythagore que l'octave et la quinte, et tout reprendre à zéro.

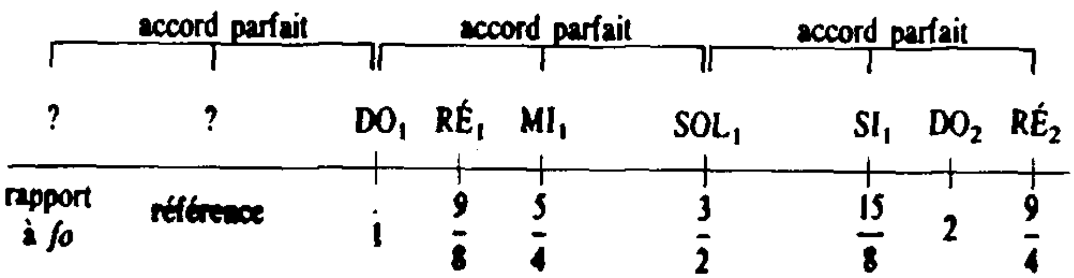
F. LA GAMME DE ZARLINO *(1517.1590)*

Le point de départ en est simple trois notes, de fréquences f_0, $\frac{5}{4}f_0$ et $\frac{3}{2}f_0$.

Appelons-les DO, MI et SOL.



(DO, MI, SOL) est un accord parfait majeur.
Construisons l'accord parfait majeur commençant par SOL :
la seconde note est $\frac{5}{4}\times\left(\frac{3}{2}\right)f_0 = \frac{15}{8}f_0$ c'est une nouvelle note qu'on appelle SI ; la troisième note de l'accord (SOL, SI, ?) est donnée par la quinte de SOL $\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)f_0 = \frac{9}{4}f_0$ qu'on remonte d'une octave pour rester dans l'intervalle *$[f_0, 2f_0]$* on trouve $\frac{9}{8}f_0$ qu'on appelle RÉ.
On retrouve d'ailleurs ici la deuxième quinte de la gamme de Pythagore, au rapport $\frac{9}{8}$.



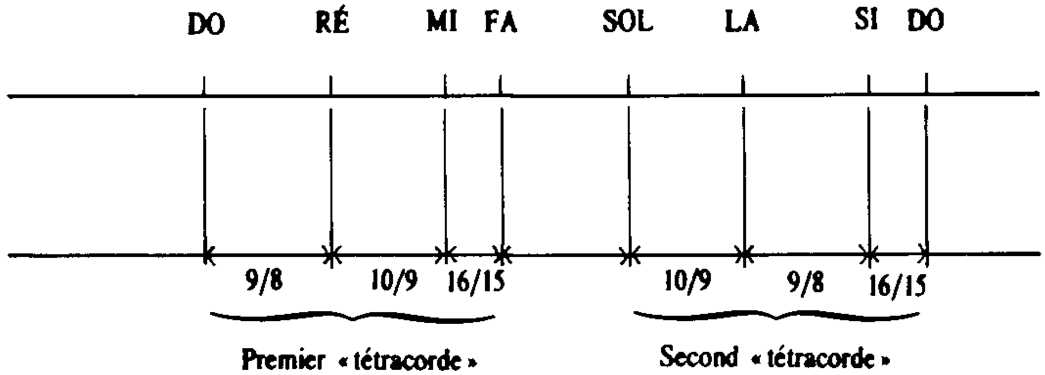
Cinquième question

L'accord parfait dont la dernière note est DO est (FA, LA, DO).
Calculer les fréquences de FA_0 et LA_0 puis celles de FA_1 et LA_1.

On a alors obtenu les sept notes principales de la gamme de Zarlino. L'échelle est donc la suivante :

Fondamentale	rapport 1	par exemple	DO
Seconde	$\frac{9}{8}$		RÉ
Tierce (majeure)	$\frac{5}{4}$		MI
Quarte	?		FA
Quinte	$\frac{3}{2}$		SOL
Sixte	?		LA
Septième	$\frac{15}{8}$		SI

Si on calcule les intervalles (c'est-à-dire le quotient des fréquences) entre ces notes on trouve trois valeurs possibles $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ ou $\frac{16}{15}$



$\frac{9}{8}$ s'appelle un « ton majeur », $\frac{10}{9}$ un « ton mineur » et $\frac{16}{15}$ un « demi-ton ».

G. LE PROBLEME DES RENVERSEMENTS

Nous connaissons à présent sept notes et trois accords parfaits majeurs (FA, LA, DO), (DO, MI, SOL) et (SOL, SI, RÉ).
Que se passe-t-il si on change l'ordre des notes d'un accord ? Par exemple (MI, SOL, DO).

- L'intervalle de MI à SOL vaut $\frac{3}{2}:\frac{5}{4}=\frac{6}{5}$. C'est un nouvel intervalle, appelé **tierce mineure**.

C'est celui qui existe aussi entre LA et DO et entre SI et RE.

L'intervalle de DO à LA est la sixte (rapport $\frac{5}{3}$).

Celui de LA à DO s'appelle son « renversement ». Le produit des rapports d'un intervalle et de son renversement vaut 2 car ces deux intervalles mis bout à bout forment une octave.

D'ailleurs ici on a bien $\frac{5}{3}\times\frac{6}{5}=2$.

Par définition, la tierce (mineure) de DO s'appelle Mi ***b*** (lisez « Mi bémol »).

Qu'est-ce que **le bémol** ? C'est l'intervalle descendant de Mi à Mi ***b*** **;** son rapport est $\frac{6}{5}:\frac{5}{4}=\frac{24}{25}$.

- L'intervalle de MI à DO vaut $2:\frac{5}{4}=\frac{8}{5}$. C'est le renversement de la tierce majeure. On est donc conduit à définir une nouvelle note, dont le rapport à DO est $\frac{8}{5}$: cette note s'appelle **la quinte augmentée**.

Comment appeler cette note ? Si on remarque qu'elle est exactement un demi-ton au-dessus de la quinte $\frac{3}{2}\times\frac{16}{15}=\frac{8}{5}$, on comprend le nom de quinte augmentée.

Par définition, augmenter d'un demi-ton s'appelle **diéser**. La quinte augmentée de DO s'appellera donc SOL # (lisez sol dièse).

- Le dièse est donc l'intervalle de rapport $\frac{16}{15}$: il est le renversement de l'intervalle de

septième car $\frac{16}{15} \times \frac{15}{8} = 2$.

On pourra donc définir DO # en disant que l'intervalle de DO à DO # est l'équivalent de l'intervalle de SI à DO.

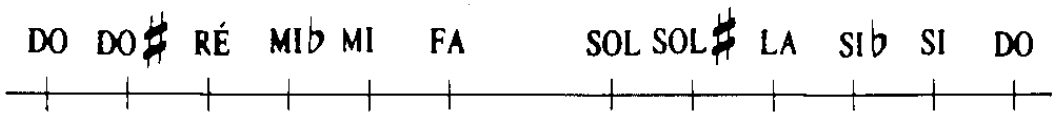
- Enfin renversons l'intervalle RÉ-MI (ou LA-SI) qui vaut $2 : \frac{10}{9} = \frac{9}{5}$. Voici une nouvelle note

située un peu au-dessous de la septième ($\frac{9}{5} = 1{,}8$ et $\frac{15}{8} = 1{,}875$) plus précisément pour

descendre de $\frac{15}{8}$ à $\frac{9}{5}$ il faut multiplier par $\frac{9}{5} : \frac{15}{8} = \frac{24}{25}$ tiens c'est un bémol !

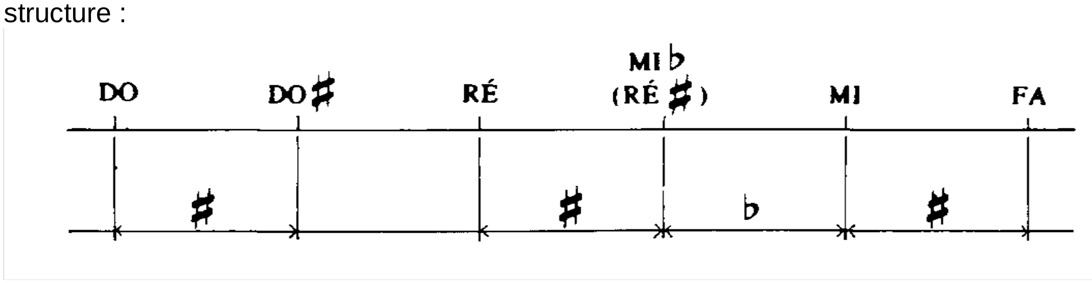
D'où le nom de SI ***b*.**

- En résumé, quatre nouvelles notes intermédiaires : DO #, MI ***b*,** SOL # et SI ***b*.**



H. ON RETOMBE DANS LE COMMA !

Nous sommes donc toujours en présence de deux « tétracordes » identiques dans leur structure :



- On peut remarquer que MI ***b*** pourrait s'appeler RÉ #.

En effet on a : $\frac{9}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{5}{4} \times \frac{24}{25} = \frac{6}{5}$.

RÉ # MI ***b*** MI ***b***

On peut d'ailleurs commencer à établir l'arithmétique des intervalles de la gamme de Zarlino :

un ton mineur = I dièse + 1 bémol

en effet $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \times \frac{25}{24}$.

C'est la situation entre Ré et Mi ainsi qu'entre La et Si.

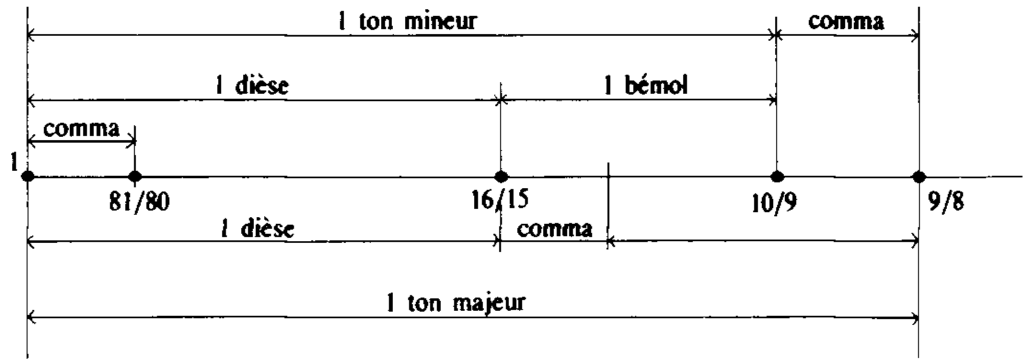
D'autre part on a vu que :

un demi-ton = 1 dièse.

- Il faut remarquer qu'un bémol n'est pas « le contraire » d'un dièse puisque si on dièse puis on bémolise une note, on ne retombe pas dessus :

$$\frac{16}{15}\times\frac{24}{25}=\frac{24}{25}\times\frac{16}{15}=\frac{128}{125}\neq 1$$

- Voici un graphique où sont représentés tous ces intervalles :



- La différence entre un ton majeur et un ton mineur s'appelle le **comma** syntonique ; c'est un intervalle de rapport $\frac{9}{8}:\frac{10}{9}=\frac{81}{80}$.

Il apparaît à plusieurs reprises sur le graphique précédent.

- **Principe d'approximation** :

le comma est supposé imperceptible à l'oreille humaine et sert de marge d'erreur.

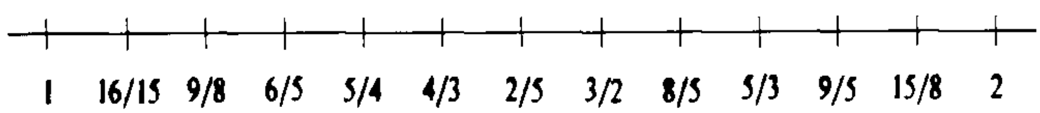
- Prenons un exemple : Do # et Ré ***b*** sont *à* priori distincts :

la fréquence de Do # est $\frac{16}{15}f_0$ et celle de Ré ***b*** est $\frac{9}{8}\times\frac{24}{25}f_0=\frac{27}{25}f_0$; l'intervalle de Do # à Ré ***b*** est donné par le rapport $\frac{27}{25}:\frac{16}{15}=\frac{81}{80}$. Cet intervalle vaut 1 comma : on accepte alors de confondre Do # et Ré ***b***,

Sixième question

a) Est-ce que le principe d'approximation permet de confondre La # et Si ***b*** ?
b) Quel intervalle est son propre renversement ? Y a-t-il dans la gamme de Zarlino une note correspondant à cet intervalle ? Et à un comma près ?
c) **Le problème des transpositions** : en prenant comme échelle les onze intervalles définis jusqu'à présent et en ajoutant la quinte diminuée de rapport $\frac{7}{5}$, on a :

rapport à f_0



Avec la fondamentale DO on obtient les notes DO, Do #, RE, MI ***b***, MI, FA, FA #, SOL, SOL # ,LA, SI ***b***, SI et DO.

- Calculer les fréquences des notes obtenues en appliquant l'échelle ci-dessus à la fondamentale RÉ et comparez avec les notes de l'échelle de DO : lesquelles sont les mêmes ? Lesquelles peuvent être confondues ? Yen a-t-il qui ne le peuvent pas ?
- Même travail avec MI comme fondamentale.
- Que pouvez-vous en conclure pour la gamme de Zarlino ?

I. LE TEMPERAMENT

Aussi bien la gamme de Pythagore que la gamme de Zarlino comportent des faiblesses. En particulier, douze quintes ne retombent pas sur sept octaves, et ceci entraîne bien des complications ! Alors au XVII^{e} siècle on décida que :

douze quintes sont égales à sept octaves

et comme la valeur de l'octave (rapport de fréquences : 2) ne pouvait être discutée, on modifia la valeur de la quinte de façon à rendre l'égalité ci-dessus juste. Si *q* désigne le rapport de fréquences caractéristique de la quinte on n'aurait plus $q = \frac{3}{2}$ mais une certaine valeur obtenue par le calcul :

au bout de douze quintes, f_0 a été multiplié par q^{12} ;

au bout de sept octaves, f_0 a été multiplié par 2^7.

On devra donc avoir $q^{12} = 2^7$ soit $q = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$ ce qu'on peut encore écrire $q = 2^{7/12}$.

Pour se rassurer de tant d'audace, on peut remarquer que $2^{7/12} \approx 1{,}498$ ce qui n'est pas loin de 1,5, valeur traditionnelle de *q*.

On pose ensuite : sept demi-tons = une quinte d'où un demi-ton vaut $2^{1/12}$ puis un ton = deux demi-tons soit un rapport de $2^{2/12} = 2^{1/6}$.

On obtient donc une échelle parfaitement régulière où on a conservé les noms classiques :

	DO	DO♯	RÉ	MI♭	MI	FA	FA♯	SOL	SOL♯	LA	SI♭	SI	DO
Rapport à f_0	1	$2^{1/12}$	$2^{1/6}$	$2^{1/4}$	$2^{1/3}$	$2^{5/12}$	$2^{1/2}$	$2^{7/12}$	$2^{2/3}$	$2^{3/4}$	$2^{5/6}$	$2^{11/12}$	2

Les dièses et les bémols se confondent avec les demi-tons.

Septième question

Montrer qu'en partant de la fondamentale, et en ajoutant successivement douze quintes on obtient exactement les douze notes de l'échelle tempérée.