OPTION DE PREMIÈRE L : GÉOMÉTRIE PLANE

L'histoire des constructions à la règle et au compas est très longue. En fait, il a fallu 20 siècles pour résoudre certains problèmes dont la conclusion est négative. Il faut remarquer qu'à partir du moment où l'on s'est demandé si cela était possible, on a avancé beaucoup plus vite.

CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

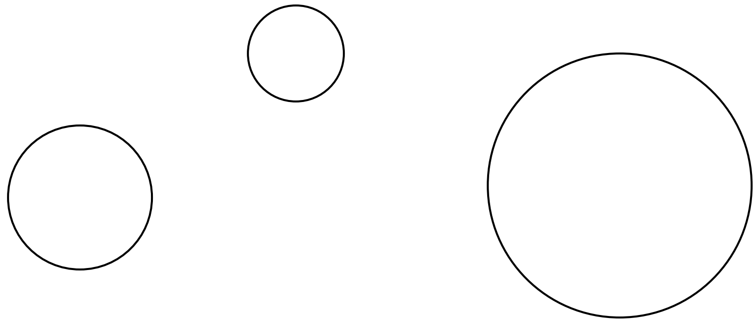
Droite, d'un grave port, pleine de majesté,
Inflexible et surtout observant l'équité,…

Telle est la règle, décrite par le conteur du XVII^e siècle Charles Perrault. Il lui associe, comme le faisaient déjà les Anciens, le compas, à qui il semble prêter une certaine désinvolture :

Son frère le compas fut pourvu seulement
De jambes et de tête, et marche justement,
Tournant de tous les côtés par ordre et par mesure.
Et toujours de ses pas traçant quelque figure.

À eux deux, ces instruments mythiques de l'architecture grecque, referont le monde de la géométrie et leur usage défiera longtemps les mathématiciens.

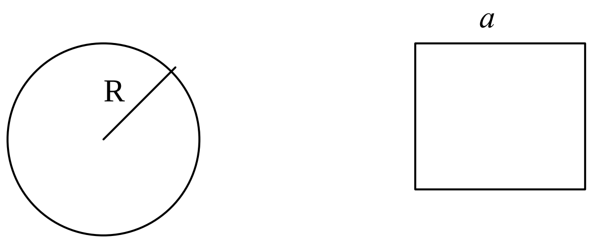
On peut évidemment se demander pourquoi les Grecs, ces grands bâtisseurs, inventeurs de nombreux moyens mécaniques pour tracer des courbes, ont à ce point privilégié ces deux instruments simples que sont la règle et le compas, refusant à tous les autres le statut géométrique que la pratique leur conférait. Il n'y avait disait déjà Platon de vraie construction qu'à la règle et au compas. Eux seuls étaient capables de produire un mouvement « vrai et élémentaire », selon Théon de Smyrne, «pur » comme aurait dit le philosophe du mythe de la Caverne. C'est pourquoi, depuis l'Antiquité grecque, qui a marqué de son sceau toute la géométrie jusqu'au XVIII^e siècle, et laisse encore des traces dans celle qu'on enseigne à l'école aujourd'hui, on ne tient pour géométriquement valables que les constructions réductibles à la circonférence et à la droite. Bien pire, dès lors qu'un énoncé demande de « construire », il sous – entend automatiquement « à la règle et au compas » ; vous bannirez d'office règle graduée, équerre, ou tout autre instrument.
On peut se demander pourquoi ils attachaient autant d'importance à la règle et au compas. Probablement parce que le cercle et la droite sont les figures les plus simples. Ils ont su résoudre la plupart des problèmes de géométrie qu'ils se sont posés. Par exemple, Appollonius a su trouver tous les cercles tangents à trois cercles donnés (il y en a huit). Ce résultat a été retrouvé par Viète (1540 – 1603) et Gergonne (1771 – 1859).



Cependant quelques problèmes leur résistent.

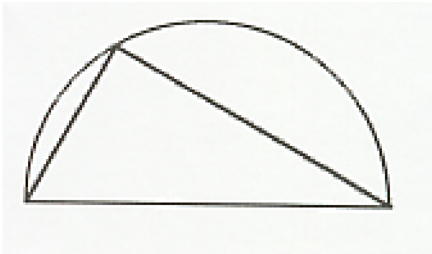
1. La quadrature du cercle

On trouve des traces de ce problème dans un document, le Papyrus de Rhind, bien avant les Grecs
(- 1700) avant notre ère, mais les Grecs s'y sont attelés.
Le problème est le suivant :
Peut – on construire, à la règle et au compas, un carré de coté a pour que l'aire du disque délimité par le cercle (C) soit égale à celle du carré ?



Autrement dit, peut – on trouver a tel que : $\pi\ R^2 = a^2$?
Si on prend R = 1, il s'agit de construire $\sqrt{\pi}$ à la règle et au compas.
Dans le Papyrus de Rhind (écrit vers – 1700 avant J.C. par le scribe Ahmes et acheté à Louksor par Henry Rhind, avocat écossais en 1858) on trouve une solution approchée :
Si on note d le diamètre du disque, $a = \frac{8}{9} d$ convient à peu près.

En fait, on trouve : $\pi \frac{d^2}{4} = \frac{64}{81} d^2$ d'où $\pi = \frac{256}{81}$ soit $\pi \approx 3{,}16$.
A l'époque des Grecs, on savait résoudre quelques quadratures : ainsi Hippocrate de Chio
(vers 430 avant J.C.) avait montré que l'aire du triangle rectangle est égale à la somme des aires des lunules.



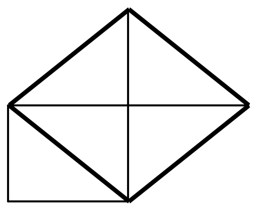
La quadrature de la parabole par Archimède était extraordinaire pour l'époque.

2. La duplication du cube

Peut – on construire à la règle et au compas un cube de volume double de celui d'un cube donné ?

Peut – on construire a tel que $a^3 = 2\ b^3$?
Si on prend $b = 1$, on doit construire $\sqrt[3]{2}$.
Ce problème a une origine légendaire : c'est le problème de Délos.

Plus sérieusement : les Pythagoriciens savaient déjà dupliquer le carré.



Ils cherchaient à résoudre un problème du même type pour un volume.

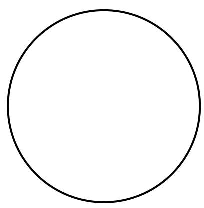
3. Trisection de l'angle

Il s'agit de partager un angle en trois angles de même mesure.
On sait partager un angle en deux angles de même mesure. On sait partager à le règle et au compas un angle de 90° en trois angles de 30° mais on ne sait pas le faire pour un angle de 60° par exemple.

4. Construction d'un polygone régulier

Il s'agit de construire pour chaque n supérieur ou égal à trois un polygone régulier ayant n côtés.
On sait, par exemple, construire à la règle et au compas un hexagone régulier. Les Grecs savaient construire un carré, un octogone, un hexagone et, plus étonnant un pentagone régulier ainsi qu'un polygone à 15 côtés.

Remarquons que si on sait faire la construction pour un polygone à trois côtés et un polygone à cinq côtés, on sait le faire pour un polygone à quinze côtés : cela tient à la relation $\frac{1}{15} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$.



En revanche les Grecs ne savent pas faire la construction pour un heptagone régulier. Pour un polygone à neuf côtés on retombe sur le problème de la trisection d'un angle. Reste aussi le problème de la construction d'un polygone régulier à onze, treize…, dix – sept côtés.
Le problème général reste en suspens jusqu'en 1882.
Par contre, on connaissait une construction approchée de l'heptagone.

5. Retour au problème mathématique de constructions exactes à la règle et au compas

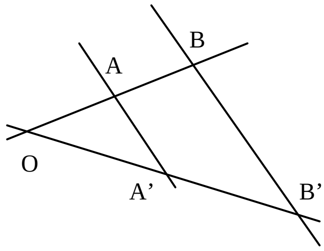
Les constructions de base sont :
- la médiatrice d'un segment et donc aussi le milieu d'un segment ;
- la parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Pour montrer que certains des problèmes posés par les Grecs sont impossibles il a fallu :
- d'abord vaincre l'idée que c'est possible ;

- puis sortir du cadre géométrique et passer dans celui des nombres.

Avec deux axes gradués, on peut construire beaucoup de nombres » :

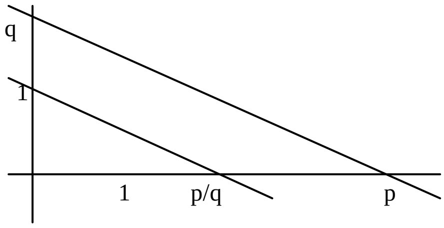
- tous les entiers relatifs ;
- tous les rationnels (nombre de la forme $\frac{p}{q}$



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

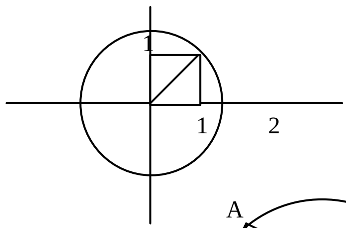
Le point de départ de ces constructions est le théorème de Thalès:

On trace p et q (p et q sont deux nombres entiers)
On trace la droite (pq) et on en déduit le nombre.

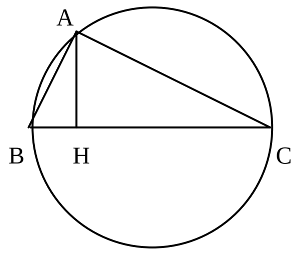


Le résultat théorique est satisfaisant. Avec cette méthode on peut aussi construire des approximations rationnelles de π, de nombres irrationnels comme $\sqrt[3]{2}$ si l'on considère que $\frac{29}{23}$ en donne une valeur approchée.

On sait aussi construire $\sqrt{2}$ et ce n'est pas un nombre rationnel (preuve d'Euclide, par l'absurde)



On sait aussi construire $\sqrt{n}$ quel que soit l'entier n. Plus précisément, si x est constructible à la règle et au compas, on sait construire $\sqrt{x}$.
L'idée repose sur la relation AB² = BH $\times$ BC valable dans un triangle ABC rectangle en A.



$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$$

Propriété : si x et y sont des nombres constructibles alors $x + y$, $x - y$, $x\ y$, $\frac{x}{y}$ sont constructibles.
On obtient ainsi beaucoup de nombres constructibles à la règle et au compas.
Les nombres constructibles sont solutions d'équations algébriques (à coefficients entiers) de degré 2^n.
<u>Exemples :</u>

a) Le nombre d'or Φ égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifie :

$2\,\Phi = 1 + \sqrt{5}$ soit $(2\,\Phi - 1)^2 = 5$ d'où $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

b) Pour $x = \sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{3}$, nous avons : $(x - \sqrt{3})^2 = 1 + \sqrt{2}$

$$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2 = \sqrt{2}$$

soit $(x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2)^2 = 2$

$$x^4 - 4\sqrt{3}\,x^3 + 16\,x^2 - 8\sqrt{3}\,x + 4 = 2$$

$$x^4 + 16\,x^2 + 2 = (4\,x^3 + 8\,x)\sqrt{3}$$

$$(x^4 + 16\,x^2 + 2)^2 = 3\,(4\,x^3 + 8\,x)^2$$

et x est solution de l'équation $x^8 + \ldots.. = 0$.

c) Des nombres comme $-\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{3}$; $\frac{2+3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ sont constructibles.

d) L'ensemble **C** des nombres constructibles est un sous corps de þ contenant ý stable par racine carrée.

Si x est un nombre constructible, il vérifie une équation à coefficients entiers de degré 2.

Que fait – on quand on construit un nombre à la règle et au compas ?
On est amené à résoudre trois types de problèmes :

- intersection de deux droites (1)
- intersection d'une droite et d'un cercle (2)
- intersection de deux cercles (3)

Il suffit alors de penser « géométrie analytique », ce qui justifie le blocage des Grecs.

Pour (1), on résout un système du type : $\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$;

Pour (2), on résout : $\begin{cases} y = ax + b \\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$. En reportant la valeur $ax + b$ dans la seconde équation, on obtient A x^2 + B x + C = 0 équation que l'on sait résoudre et qui a des solutions constructibles avec cinq opérations.

Pour (3), on est ramené au cas (2) en soustrayant membre à membre les équations des deux cercles, ce qui n'est guère étonnant si l'on pensent au problème géométrique de la droite intersection de deux cercles sécants.

<u>Corollaires :</u>

1. $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible puisqu'il est solution de l'équation $x^3 - 2 = 0$ et l'on montre qu'il n'est solution d'aucune équation algébrique de degré 2.
2. La trisection de l'angle est impossible.
3. π n'est solution d'aucune équation algébrique à coefficients entiers : c'est un nombre transcendant. Ce résultat établi par Lindemann en 1882 permet de voir que la quadrature du cercle est impossible.

6. Polygones réguliers

Théorème de Gauss (1801) :
Un polygone régulier à *p* côtés est constructible si et seulement si *p* est de la forme :

2^a ou 2^a $p_1 p_2 p_3$…. où a est un entier et p_i est un nombre premier de Fermat.

Les nombres de la forme ($2^{(2^n)}$ + 1) sont les nombres de Fermat (1601 – 1665). Il avait affirmé que tous ces nombres sont premiers.
Pour n = 0, on a $2^1 + 1 = 3$ ce qui correspond au triangle équilatéral.
Pour n = 1, on a $2^2 + 1 = 5$ ce qui correspond au pentagone.
Pour n = 2, on a $2^4 + 1 = 17$ (résultat trouvé par Gauss).
Pour n = 3 et n = 4 on obtient les polygones à 257 et 65 537 côtés.

Pour n = 5, on a $2^{2^5} + 1$ qui est divisible par 641 et n'est donc pas premier (résultat dû à Euler en 1732).
De $2^{2^5} + 1$ à $2^{2^{17}} + 1$ tous les nombres de Fermat ne sont donc pas des nombres premiers.

$2^{2^{17}} + 1$ (qui se compose de 39 000 chiffres) est le plus petit nombre dont on ne sait pas s'il est premier.

Un polygone régulier, de n côtés, est dit ***constructible*** *à la règle et au compas si l'angle de mesure* $\frac{2\pi}{n}$ *radians est lui – même constructible.*

Ce texte provient d'une conférence donnée par le Professeur Daniel Perrin à l'IUFM de Versailles dans les années 90 et dont la rédaction fût assurée par Mme Jacqueline Penninckx et complété depuis par M. René Merckhoffer.