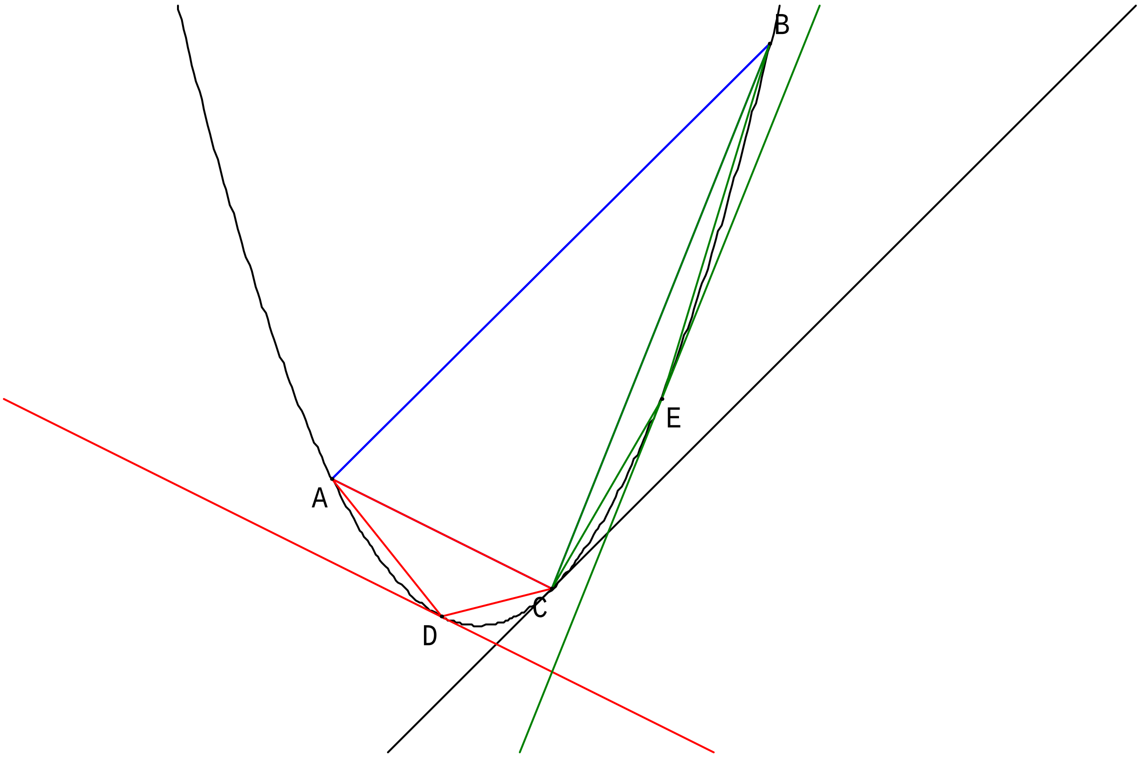
Logarithme et quadrature de l'hyperbole

Quadrature : détermination d'aire (cercle, segment de parabole, hyperbole,…)

Un peu d'histoire :

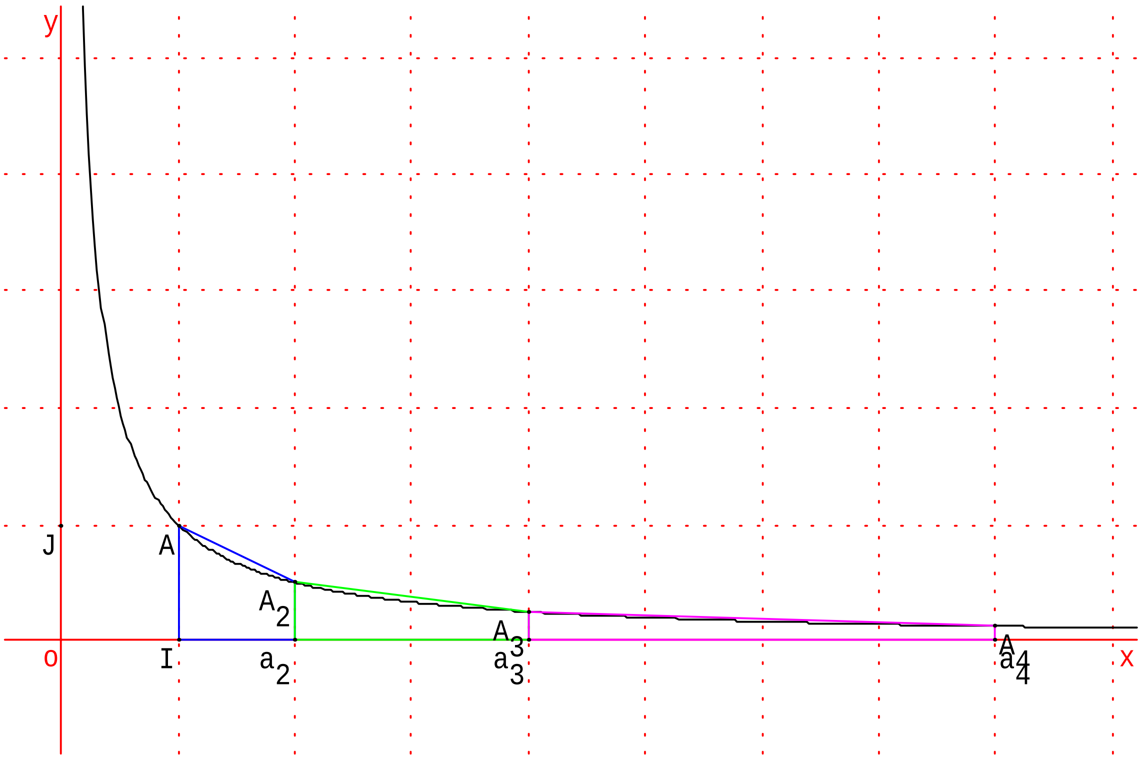
- **Eudoxe** (IV^{e} siècle av. J.C.) réussit à présenter de façon rigoureuse certains raisonnements, mais sa méthode nécessite de connaître au préalable le résultat, puisqu'elle consiste à montrer que celui-ci ne peut être ni inférieur ni supérieur à la valeur supposée. Ceci repose sur une proposition du livre X des *Eléments* d'Euclide : « Deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées. »
- **Archimède** s'intéresse à la quadrature de parabole ou aire du domaine délimité par un arc de parabole et la corde [AB] qui joint les extrémités de cet arc.



Il cherche à déterminer le rapport de l'aire du segment de parabole à celle du triangle ABC, où C est le point de la parabole en lequel la tangente est parallèle à (AB). L'aire du segment de parabole est obtenue comme limite de la suite infinie des aires de polygones déterminés chacun à partir du précédent, en doublant le nombre de côtés et en introduisant des sommets intermédiaires (D et E sur la figure). Le rapport cherché est alors la limite de la suite infinie croissante $1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},\dots$

limite qu'Archimède montre égale à $\frac{4}{3}$. Une double démonstration par l'absurde lui permet alors d'établir que l'aire du segment de parabole est égale aux $\frac{4}{3}$ de celle du triangle ABC.

- **Thâbit ibn Qurra** (IX^{é} siècle) effectue un calcul équivalent à celui de la détermination de l'intégrale $\int_0^a \sqrt{x}dx$ par un procédé revenant à diviser l'intervalle d'intégration en éléments formant une progression arithmétique.
- **Simon Stevin** (1586)**, Luca Valerio** (1604-1606) reviennent à des problèmes de quadrature. Ce dernier part de figures « en escalier » inscrites et circonscrites, composées de rectangles nombreux de même hauteur, et cherche à éliminer la différence existant entre ces figures et la surface donnée, en augmentant le nombre de ces rectangles.
- **Kepler** (1609) considère que la démonstration de la mesure du cercle par Archimède ne réside pas dans la technique de résolution par l'absurde mais dans la décomposition du cercle en un nombre illimité de triangles infiniment petits.
- **Cavalieri** considère qu'une ligne est constituée d'un nombre infini de points, une surface d'un nombre infini de lignes et un solide d'un nombre infini de surfaces. Grâce à d'ingénieuses transformations, la mesure d'une grandeur (surface ou volume) interviendra, soit lorsque ses indivisibles pourront être aisément sommés, soit lorsqu'ils pourront être comparés à ceux de figures déjà connues.
- **Grégoire de Saint Vincent** (1647) note qu'à des abscisses en progression géométrique correspondent des aires hyperboliques en progression arithmétique.



Son disciple Sarasa en déduisit peu après la proportionnalité des aires des bandes d'hyperbole au logarithme du rapport des abscisses des parallèles qui les délimitent. Peu à peu la quadrature des aires des segments hyperboliques au moyen de logarithmes fut considérée comme un fait acquis ainsi que la constance du rapport numérique entre logarithmes de différentes bases. En 1668, Mercator considéra les segments d'hyperboles comme des logarithmes qu'il qualifia de « naturels » et qu'il calcula par intégration terme à terme de la série obtenue par le développement de $\frac{1}{1+x}$.

Naissance des logarithmes

Tycho Brahé – Johannes Kepler – Joost Bürgi (XVII$^{\text{è}}$ siècle)
Les deux premiers étaient astronomes. Le troisième était leur assistant horloger suisse et s'était fait remarquer en concevant des horloges d'une très grande précision permettant à Kepler d'établir ses fameuses lois. Bürgi chercha à simplifier ses calculs trigonométriques en inventant ce qui devint plus tard les logarithmes. Il publia ses travaux en 1620.

Le baron de Merchiston ou de Neper
Cet amateur éclairé, s'adonnant aux mathématiques à ses heures perdues, prend de vitesse Bürgi en publiant en 1614, à Edimbourg, un tavail : *Description des merveilleuses règles des logarithmes et de leur usage dans l'une ou l'autre trigonométrie, aussi bien que dans tout calcul mathématique.*
Cet opuscule de 56 pages contient de nombreuses tables, dont une table des logarithmes des sinus d'un angle. Il cherche en fait un procédé de calcul transformant automatiquement des produits de nombres en des sommes et des extractions de racines en divisions.

Ces nombres furent qualifiés d'artificiels ou de logarithmes, mot formé sur les lettres grecques « logos » (signifiant « raison » ou « rapport ») et « arithmos » (signifiant « nombre »).
Partant de la progression géométrique 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, …., on ne considère que les exposants 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, … qui forment une suite arithmétique. Multiplier les puissances de dix entre elles revient à ajouter les exposants. Plus généralement, les nouveaux nombres que sont les logarithmes sont des intermédiaires qui méritent bien leur qualificatif d' « artificiels », puisque pour calculer un produit ab on calcule les logarithmes de a et de b, on les ajoute et on cherche le nombre qui a pour logarithme le résultat de la somme. Cette nouvelle démarche de calcul nécessite la construction de tables de calculs de logarithmes qui ont été élaborées par Neper et ses successeurs. Les logarithmes permettent aussi d'extraire des racines carrées. Ces calculs peuvent se faire à partir des puissances de dix (logarithme décimal) ou d'autres puissances et les tables associées (et similaires à celles construites au XVII^è^ siècle) étaient encore utilisées par les élèves dans les années 70.