LES GRAPHES :

Et si ça servait à quelque chose?

Pierre Bornsztein (Mars 2002).

La Théorie des Graphes possède de nombreuses applications et intervient dans des domaines variés, qu'ils soient purement mathématiques ou non. Les graphes permettent, entre autres, de formaliser ou de modéliser nombre de situations et de problèmes. Ce serait donc une grosse erreur de ne voir dans les graphes qu'un outil pour la résolution d'énigmes mathématiques.

L'objet est ici de présenter un certain nombre de domaines dans lesquels la théorie des graphes se révéle être un outil essentiel. Bien entendu, la liste ci-dessous n'est pas exhaustive, et dans chaque domaine, on pourrait là-encore multiplier les exemples.

Dans un premier temps, les graphes ont souvent été utilisés comme diagrammes, afin de classifier les connaissances. Plus récemment, par l'utilisation de résultats mathématiques profonds, ils ont contribués aux développements et à des découvertes dans de nombreux domaines. Les apports sont mutuels : Des résultats théoriques sur les graphes trouvent des interprétations et des applications pratiques. De nouveaux domaines, scientifiques ou non, conduisent à de nouvelles questions qui orientent les recherches.

I-Les graphes dans les Sciences Sociales.

Les Sciences sociales utilisent les graphes pour modéliser les relations qui existent à l'intérieur d'un ensemble donné d'objets ou de personnes.

Les membres d'une société sont en général soumis à des relations qui définissent la structure de cette société. On peut ainsi représenter cette structure par un graphe dont les sommets sont les individus ou membres de la société, et dont chaque arête (u, v) symbolise le lien (et parfois la domination) entre l'individu u et l'individu v au sein de la société.

L'organigramme d'une entreprise ou un arbre généalogique (relations de parentés, mariages, etc..) sont des exemples de tels graphes.

Dans la plupart des organisations humaines, ce graphe est orienté et sans cycle. Le niveau de subordination d'un individu donné par rapport à un autre est alors facilement calculable comme la longueur du chemin minimal entre ces deux individus.

Cela permet également de modéliser le concept de niveau (ou statut) social.

Cependant, dans certaines sociétés animalières structurées, on peut voir apparaître des cycles. Concrétement, la relation de domination dans un poulailler se manifeste par des coups de becs sur la tête et sur le cou ([2],[3]). C'est le mathématicien H.G. Landau qui a modélisé ce phénomène et en a dégagé les premières propriétés.

L'apport principal de la Théorie des graphes dans les Sciences Sociales est sans doute la précision des concepts et du vocabulaire qu'elle a offert aux chercheurs, qui ont ainsi eu la possibilité d'observer, de conjecturer et de formuler plus clairement leurs analyses. Elle permet d'organiser des données et d'en dégager des structures cohérentes. Dans le domaine des sciences sociales, on ne travaille pas avec des grandeurs facilement quantifiables et mesurables comme la température ou la masse. Il s'agit de définir des mesures pour des variables comme la préférence, l'indifférence, l'aspect esthétique,...pour les rendre analysables scientifiquement, et permettre de comprendre des mouvements d'opinions dans les groupes ou sociétés humaines.

II-Les graphes dans l'Industrie.

L'utilisation la plus fréquente des graphes (orientés) dans l'industrie concerne la planification des projets. Il s'agit souvent de construire le graphe correspondant au dictionnaire des tâches à effectuer. Le problème est en général de trouver une organisation qui minimise certaines quantités (le temps, l'argent, le transport...) sans violer les contraintes d'ordonnancement.

C'est un des objets de la Recherche Opérationnelle, qui étudie modèles et méthodes afin d'aider à la prise de décisions. Citons :

a) Les problèmes de circulations (ou problèmes de flots), par exemple pour le transport d'une production vers différents lieux de distributions.

b) Les problèmes d'ordonnancements, rencontrés lors de la réalisation d'un projet quelconque pour les diverses opérations nécessaires et à leurs contraintes mutuelles (voir exemple en fin de document).

c) Les problèmes de décisions lorsque les choix doivent s'effectuer selon plusieurs critères (investissements, campagnes publicitaires...).

Mais les graphes interviennent également dans les questions liées :

d) Aux problèmes de répartition optimale d'un certain type d'équipement : immeubles et maisons sur un site donné, organisation d'un atelier, implantation d'établissements publiques (hopitaux, commissariats, aéroports...). Le but est alors en général de minimiser un temps de trajet ou d'attente (personnes ou marchandises).

e) A la gestion optimale des équipements.

Par exemple, pour le ramassage des déchets (ou le nettoiement des rues), comment organiser les trajets quotidiens des différents camions pour que deux trajets ne passent pas au même endroit un même jour? En termes de graphes, on peut considérer le graphe dont les sommets sont les différents trajets, deux étant reliés par une arête lorsqu'ils passent par un même site. Le problème revient alors à déterminer si ce graphe est 6-colorable (a priori, le dimanche, c'est relache)

f) A la construction de réseaux routiers, et à leurs organisations (sens uniques, répartition du traffic, métro, desserte...).

Par exemple, on peut s'interesser au problème de gestion de la circulation urbaine. Considérons les rues d'une ville comme les arêtes du graphe dont les sommets seraient les carrefours (ou les portes d'entrées de la ville). Ce graphe est initialement non orienté. Il est parfois avancé que les encombrements et embouteillages seraient moins nombreux si certaines rues étaient en sens unique (d'où des gains possibles en matière de temps de transports, de pollution,...). Il s'agit donc de transformer le graphe original G en un graphe orienté G', de sorte que G' soit fortement connexe (c.à.d. que l'on puisse aller de n'importe quel endroit à n'importe quel autre).

On considère le problème simplifié où chaque rue va devenir en sens unique. Est-ce toujours possible? Non. Un théorème dû à Robbins (1939) affirme qu'un tel graphe G' existe si et seulement si G est connexe (c'est la moindre des choses) et qu'il n'a pas de ponts (un *pont* est une arête qui, si elle est éliminée, conduit à un graphe non connexe).

Si l'on accepte que certaines rues restent à double sens, il apparaît plus économique de remplacer dans G' deux arêtes d'orientations contraires qui relient les même sommets par une arête non orientée. Un tel graphe G'' est dit *mixte*. Un tel graphe est fortement connexe si G' est fortement connexe.

Boesch et Tindell (1977) ont prouvé que si G'' est un graphe mixte fortement connexe alors, il est possible d'orienter chaque arête de G'' qui n'est pas un pont et obtenir encore un graphe mixte fortement connexe.

Il existe également des algorithmes qui permettent de déterminer de telles orientations.

Evidemment, il existe en général plusieurs graphes orientés ou mixtes possibles, et il ne sert à rien d'envisager ces problèmes sans inclure une condition d'efficacité de la modification du sens de circulation des rues. On définit la *distance* entre les sommets a et b d'un graphe connexe comme la longueur $d(a, b)$ du plus court chemin reliant a et b (Attention, dans un graphe orienté, on peut avoir $d(a, b) \neq d(b, a)$). Voici, par exemple, des critères possibles :

1) Minimiser la moyenne de toutes les distances $d(a, b)$.

2) Que la plus grande distance $d(a, b)$ soit la plus petite possible.

3) Maximiser la moyenne de toutes les distances $d(a, b)$.

4) Que la plus petite distance $d(a, b)$ soit la plus grande possible.

Chvátal et Thomassen ont prouvé que tout graphe connexe de diamètre d et sans pont induisait un graphe orienté fortement connexe de diamètre au plus $2d^2 + 2d$. Il ont également prouvé que la détermination de ce graphe induit satisfaisant 2) était difficile.

Notons enfin que les conditions 3) et 4) ne sont pas des canulars et sont étudiées pour décourager les personnes d'avoir recours à leurs voitures, et encourager à l'utilisation d'autres modes de transports (par exemple, pour la traversée de parcs protégés).

g) A la construction de réseaux de télécommunications.

Pour qu'un signal (la télévision, par exemple) soit reçu par tous, il n'est pas nécessaire de construire un émetteur dans chaque foyer...Supposons que l'on dispose de moyens de communications entre différentes villes, et que l'on veuille que toute soient en mesure de recevoir un signal donné. Comment déterminer une dipositions sûre et économique des émetteurs?

Considérons le graphe orienté dont les sommets sont les villes, et dont les arêtes (x, y) symbolisent que l'on peut atteindre y par un signal émis depuis x. Un ensemble de sommets A est dit *dominant* lorsque, pour tout sommet y qui n'est pas dans A, il existe un sommet x dans A tel que (x, y) soit une arête.

Le problème consiste donc à déterminer un tel ensemble dominant, et si possible de taille minimale.

Notons que des questions équivalentes apparaîssent dans la surveillance des sites stratégiques.

h) A la construction de réseaux éléctriques.

Le problème consiste à déterminer les tensions et les courants aux différents endroits du réseau, connaissant certaines valeurs initiales (pour autant qu'il y ait une solution unique). Le réseau est représenté par un graphe dont les sommets sont les sources de tensions, de courants, ou les noeuds de connexions. Les lois de Kirchoff conduisent à la mise en équations sous la forme d'un système linéaire du type :

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ . \\ . \\ . \\ i_n \end{pmatrix} = 0$$

où les u_k (resp. i_k) désignent les tensions (resp. intensités) aux différents points du réseau, et A, B sont deux matrices $n \times n$.

La solution de ce problème nécessite donc, a priori, la résolution d'un imposant système d'équations. En théorie, il s'agit de questions purement algébriques. En pratique, la plupart du temps, la valeur de n est trop grande pour envisager une telle résolution. Des arrondis de calculs vont inévitablement apparaître, et entraîner des erreurs finales inacceptables (déterminants qui ne s'annulent pas, etc...). L'idée est alors de développer des méthodes combinatoires qui nécessitent le moins possible de techniques numériques.

On peut en effet démontrer que si un réseau n'est constitué que de sources de tensions, de sources de courants, et de résistances ohmiques (des connexions entre deux noeuds uniquement) supposées indépendantes, alors il y a existence et unicité de la solution si et seulement si le graphe admet une forêt recouvrante (spanning forest) qui contienne toutes les sources de tensions et aucune des sources de courants.

Bien entendu, des résultats existent également dans des cas plus généraux.

Notons que la notion de matrice d'incidence a été introduite par Kirchoff pour étudier les circuits éléctriques. Elle a été reprise en Topologie par Poincaré pour fonder son "Analysis Situs"

Toutes les questions mentionnées ci-dessus sont en général extrêmement complexes, et ne peuvent être résolus qu'à l'aide d'algorithmes parfois sophistiqués. Et encore, souvent ne dispose-t-on pas d'algorithmes qui garantissent une solution optimale dans un temps raisonnable (Tout ceci reste volontairement vague car nous ne rentrerons pas ici dans l'étude de la complexité des algorithmes).

III-Les graphes en Géographie.

On peut utiliser les graphes pour modéliser le réseau des cours d'eau et rivières. De tels modèles sont utilisés par les géographes pour analyser l'évolution d'un système de rivières et sa propension à l'inondation, ainsi que pour étudier la structure topologique de ces réseaux.

Chaque source et chaque lieu de confluence est un sommet, les arêtes (orientées) symbolisant naturellement les cours d'eau, jusqu'au lieu où le réseau rejoint une mer, un océan ou un lac.

Une première approche (fig.a) consiste à pondérer le graphe de la manière suivante :

Toute arête dont l'origine est une source reçoit le n°1. Puis, de proche en proche, à chaque arête non numérotée et adjacente à une arête numérotée, on assigne le nombre maximum porté par une arête adjacente plus 1.

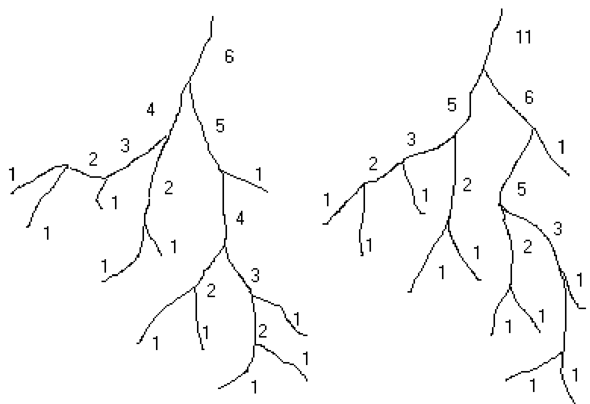


fig.a fig.b

L'*ordre* d'un cours d'eau (c.à.d. d'une arête) est le numéro qu'il porte.
L'ordre du réseau est l'ordre de la dernière arête numérotée.

Dans l'exemple a) ci-dessus, le réseau est alors d'ordre 6.

Si n_i désigne le nombre d'arêtes d'ordre i, on définit alors le taux de bifurcations r_i par $r_i = \frac{n_i}{n_{i+1}}$.

Dans l'exemple (a) ci-dessus, on a donc :
$r_1 = \frac{11}{4}, r_2 = \frac{4}{2}, r_3 = \frac{2}{2}, r_4 = \frac{2}{1}, r_5 = \frac{1}{1}$.

Ces paramètres sont utilisés pour prédire le temps entre un orage et la crue éventuelle (on constate que plus le ratio de bifurcation est faible plus la crue est importante).

Une autre approche consiste à numéroter chaque arête par le nombre de sources qui sont en amont de son sommet d'origine.

Dans l'exemple b) ci-dessus, le réseau est d'ordre 11.

Comme ci-dessus, ces paramètres sont utilisés pour déduire des caractéristiques géographiques d'un réseau. Par exemple, il apparaît que dans la nature la plupart des réseaux ont un ratio de bifurcation moyen égal à 4, et que tout écart significatif par rapport à cette valeur est dû à l'activité humaine.

IV-Les graphes en Architecture.

La notion de graphe planaire trouve un intérêt en architecture. Parmi toutes les dispositions possibles d'équipements, bureaux... dans un étage d'immeuble comment en trouver une qui optimise une quantité donnée (place, trajets). Cela revient à trouver une décomposition optimale d'un rectangle (l'étage) en un certain nombre d'autres (les équipements, etc...) sous une certaine contrainte.

Si la question porte sur ceux des objets (équipements, bureaux etc...) qui sont ou doivent être adjacents, on peut alors représenter et interpréter le problème en termes de graphes planaires, dont les sommets sont les différents objets et les arêtes symbolisent les contraintes d'adjacence.

On peut alors déterminer tous les graphes planaires possibles qui vérifient ces contraintes. En termes de graphes, si n désigne le nombre d'objets, il s'agit de déterminer tous les sous-graphes maximaux planaires de K_n (pour lequel les sommets sont numérotés).

D'après un résultat de Tutte, on prouve que le nombre de tels sous-graphes est M_n, avec

$$M_n = \frac{n(n-1)(4n-11)!}{6(n-2)(3n-7)!}.$$

V-Les graphes en Chimie.

En Chimie, depuis bien longtemps, on a représenté les molécules par des graphes dont les atomes et les liaisons chimiques sont les sommets et arêtes du graphe. Notons que les liaisons sont parfois multiples et que les graphes peuvent donc avoir des arêtes multiples.

De telles représentations sont par exemple utiles pour distinguer et dénombrer les différents isomères d'une molécule.

Dès 1875, Cayley avait montré que la paraffine $C_{13}H_{28}$ possédait 802 isomères différents, chacun représenté par un arbre de 41 sommets (13 de degrés 4, et 28 de degrés 1).

Une question qui se pose au chimiste est de déterminer si deux composants de même formule ont ou non les mêmes propriétés. En termes de graphes, cela revient à déterminer si deux graphes dont les sommets sont numérotés sont isomorphes on non.

Il est courant de représenter les cristaux par des réseaux en trois dimensions (Par exemple, les points dont les trois coordonnées sont entières et ne dépassent pas une certaine valeur donnée, dans l'espace euclidien usuel). Si l'on veut étudier les propriétés des surfaces de ces cristaux, par exemple l'absorption de certaines molécules, il est souvent pratique de les représenter par un graphe (assimilable à un quadrillage).

Si la molécule est diatomique, on est amené à compter le nombre de façons de relier chaque sommet à exactement un de ses sommets voisins. Il est équivalent de compter le nombre de façons de recouvrir un "échiquier" rectangulaire par des dominos.

Fisher, Temperley et Kasteleyn (1961) ont élaboré des méthodes de comptages pour de tels problèmes. On peut montrer par exemple que dans le cas d'un carré de n^2 cases unités, le nombre de recouvrement par des dominos est :

$$f(n) = 2^{2n^2} \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} (\cos^2(\tfrac{i\pi}{2n+1}) + \cos^2(\tfrac{j\pi}{2n+1})).$$

VI-Les graphes en Physique.

Il est impossible de donner une liste complète des domaines de la Physique qui utilisent la Théorie des Graphes. On a mentionné ci-dessus la question des réseaux éléctriques. Donnons encore un exemple fondamental en Physique Statistique :

Considérons qu'un système est constitué d'un nombre fini N de particules, et que ce système est à chaque instant dans un certain état σ parmi un ensemble d'états possibles. Le comportement du système est gouverné par son *Hamiltonien* $H(\sigma)$, qui est égal à l'énergie du système dans l'état σ.

Il est alors considéré que toutes les propriétés macroscopiques du système sont déterminées par la *fonction de partition* Z_N du système, avec

$$Z_N = Z(T) = \sum_{\sigma} \exp(-\tfrac{H(\sigma)}{kT}),$$

où T est la température du système, et k la constante de Boltzmann.

Le *modèle de Ising* est un cas important de système représenté par un graphe G pour lequel chaque sommet est un atome. Chaque atome possède un spin qui ne peut prendre que deux valeurs. L'énergie totale du système est calculée comme la somme des énergies dûes aux interactions entre les différentes paires d'atomes. La contribution d'une paire d'atomes ne dépendant que du fait qu'ils soient reliés par une arête du graphe. Leur interaction étant elle entièrement déterminée par le fait qu'ils aient le même spin, on non.

L'état du système peut alors être représenté par une fonction σ définie sur l'ensemble S des sommets de G à valeurs dans $\{-1; 1\}$, et pour laquelle $H(\sigma)$ sera calculée comme une somme indicée sur l'ensemble A des arêtes de G. Ainsi :

$$Z(T) = \sum_{\sigma} \exp(-\sum_{(i,j)\in A} \beta\sigma_i\sigma_j)$$

où σ_i désigne l'état de l'atome i, et $\beta = \frac{J}{kT}$ avec J quantifiant l'interaction.

A partir de l'expression ci-dessus, on montre alors que l'on a :

$$Z = 2^{|S|}(\cosh(\beta))^{|A|} \prod_{l \geq 0} E(l)(\tanh(\beta))^l$$

où $E(l)$ désigne le nombre de sous-graphes eulériens de l arêtes.

On voit ainsi que déterminer la fonction Z revient à déterminer le nombre de sous-graphes eulériens de G. Ce problème a été résolu lorsque G est le réseau plan de n^2 sommets (cf.V), et encore juste dans le cas où pour chaque atome ses deux états sont équiprobables (par exemple, si l'on admet qu'il n'y a pas de champ magnétique extérieur). Le même problème en dimension 3 est encore ouvert.

VII-Les graphes en Biologie.

Selon la théorie de l'évolution, les espèces biologiques existantes sont reliées entre elles par des ancêtres communs. Les chercheurs ont l'habitude de travailler sur ces relations en construisant des arbres d'ascendance, appelés *arbres phylogénétiques*.

Actuellement, afin de construire ces arbres, lorsque l'on ne dispose pas d'assez de fossiles pour que leur étude soit concluante, on se fonde d'abord sur les analyses de séquences de certaines protéines. Il apparaît en effet que, lors du passage d'une espèce à une de ses descendantes, certaines caractéristiques génétiques sont transmises dans l'ADN.

Choisissons une protéine, par exemple la *cytochrome c* qui semble être partagée par toutes les espèces vivantes comme essentielle à la respiration. Elle peut être codée à chaque fois comme une séquence de 312 lettres choisies parmi les quatres symbôles A,C,G,U.

On construit alors le graphe pondéré dont les sommets sont les espèces et les arêtes sont pondérées par le nombre de termes de la séquence pour lesquels deux sommets diffèrent. L'objectif est alors de construire un arbre, qui recouvre tous les sommets, et pour lequel la somme des poids soit minimale. Ceci est connu sous le nom paradoxal de *parcimonie maximale,* et les techniques utilisées sont les techniques et algorithmes classiques en théorie des graphes.

Notons qu'il ne s'agit pour l'instant que d'un problème de minimisation, et qu'il n'est aucun présupposé quand au mécanisme de l'évolution.

En répétant ces analyses sur plusieurs autres protéines, on dispose ainsi de plusieurs arbres phylogénétiques possibles (et, en général, plusieurs pour une même protéine).

La théorie de l'évolution prédit que les différents arbres phylogénétiques, construits indépendamment pour les différentes protéines, doivent être "comparables" (dans un sens qu'il resterait à définir, voir [1]).

En pratique, on constate que les résultats de ces études confortent la théorie de l'évolution (sans surprise pour la majeure partie des biologistes).

Mais, le point le plus important est que la théorie de l'évolution a souvent été critiquée comme ne pouvant pas être directement testée, en opposition avec une théorie physique par exemple. Or, les graphes offrent justement une possibilité de réaliser ces tests, systématiques et rigoureux.

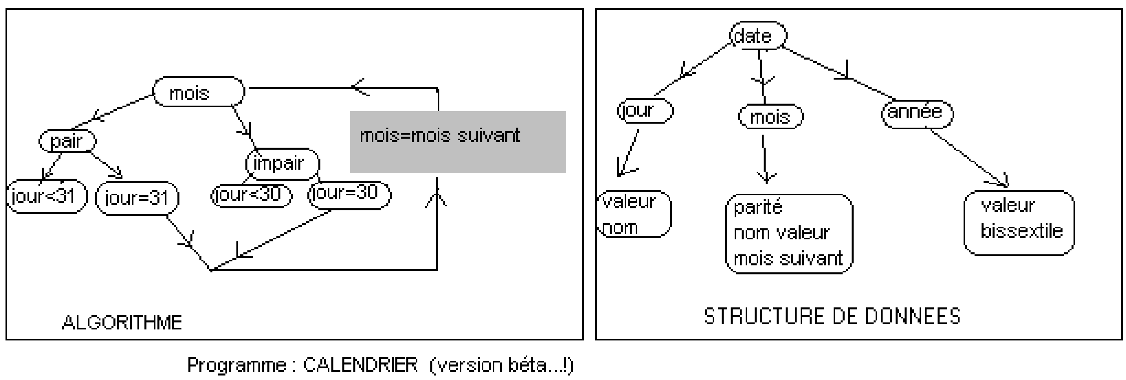
VIII-Les graphes en Informatique.

L'Informatique, l'Algorithmique et les Mathématiques Discrètes sont probablement les plus grand champs d'applications de la Théorie des Graphes. Donnons quelques exemples :

1) Représentation des programmes par des graphes

Si on veut réduire à son strict minimum la définition d'un programme informatique on peut donner l'équation de Niklaus Wirth :

Programmes = Algorithme + Structure de données



(Figure 2)

Voici un exemple de structure de données : date{jour, mois, année}.

L'algorithme consistant à mettre à jour la date pourra, par exemple, être du type :

Si mois est pair et jour = 31 alors jour = 1 et mois = mois suivant ; etc...

La donnée mois peut être elle-même un structure du type :
mois{parité, numéro, nom, mois suivant}

Une instance d'une structure de données est un exemplaire de cette structure dans un état donné (qui a une valeur donnée). Par exemple, une instance de la date peut-être la date d'aujourd'hui.

Finalement l'algorithme et la structure de données du programme sont tous deux descriptibles par des graphes (voir figure2).

L'exécution de l'algorithme ayant pour point de départ une instance de la structure de données initialisée, peut-être alors considéré comme un chemin sur le graphe qui le décrit. Les extrémités d'un chemin correspondent au début et à la terminaison du programme.

L'existence de cycles (boucles) permet d'avoir des chemins de longueurs arbitraires.

Chaque arête du chemin modifie l'état de l'instance de la structure de données associée.

Le programme a en entrée une instance de la stucture de données (son début) et en sortie cette instance dite traitée (la fin du programme).

Autre exemple : Prenons une stucture simple : un entier n , et calculons $n!$:

Un algorithme simple est : factoriel(entier n){si N vaut 0 retourner l'entier $n = 1$; sinon retourner l'entier $n\times$factoriel$(n-1)$}

Exemple pour 4! on aura le chemin suivant :

retourne (4*retourne(3*retourne(2*retourne(1*retourne(1))))) qui est formée des quatres arêtes gauches et d'une arête droite d'un arbre binaire dont les arêtes gauches correspondent à $n \neq 0$ et l'arête droite à $n = 0$.

2) Mesure de la complexité d'un algorithme.

Pour une instance donnée d'une structure de données paramétrée par un entier N, la longueur du chemin d'exécution du programme dépend de N. Notons $L(N)$ les valeurs de cette fonction.

La mesure de la complexité est l'expression asymptotique de cette fonction quand $N \to +\infty$

Par exemple, si la structure de données représente un ensemble de N entiers, et que le programme consiste à ordonner cet ensemble de N entiers, on sait que l'algorithme le meilleur, celui qui a la plus faible mesure de complexité, a une mesure de complexité égale à $L(N) = O(N \times Log(N))$.

.3) Graphes conceptuels (intelligence artificielle) :

Toujours en vue de simplifier le propos, on pourrait donner l'équation:

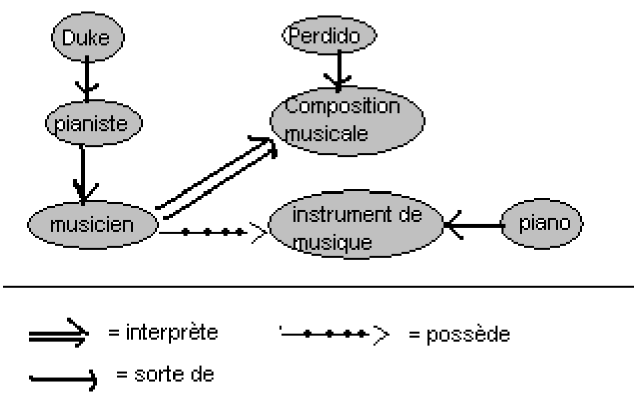
Système expert = représentation des connaisances + règles de productions de connaissances.

Il s'agit en fait d'un ensemble structuré de connaissances qui sont aussi bien des structures de données que des algorithmes et qui confèrent au système une autonomie relative en matière de maintenance et d'évolution.

Un graphe conceptuel est un graphe orienté dont les sommets sont des instances de stuctures de données et les arêtes des liens étiquetés qui peuvent être des programmes mettant ces stuctures en relation.

Exemple : Comment représenter dans un ordinateur le concept suivant ?

Duke est pianiste et interprète Perdido



La mise au point de ce réseau sémantique doit permettre de constituer une base de données que l'on peut interroger et qui puisse comprendre la question "Existe-t-il un musicien qui interprète Perdido?" et éventuellement donner une réponse qui elle-même sera enregistrée comme instance de ce réseau sémantique.

4) Traitement informatique des graphes.

Les graphes sont représentés par des stuctures de données et des algorithmes pour les manipuler.

a) La structure de données spécifique au type de sommets du graphe.

b) La relation d'adjacence qui peut par exemple être soit une matrice soit une liste chainée des sommets adjacents.

Sommet{Type sommet, Liste de sommets adjacents}

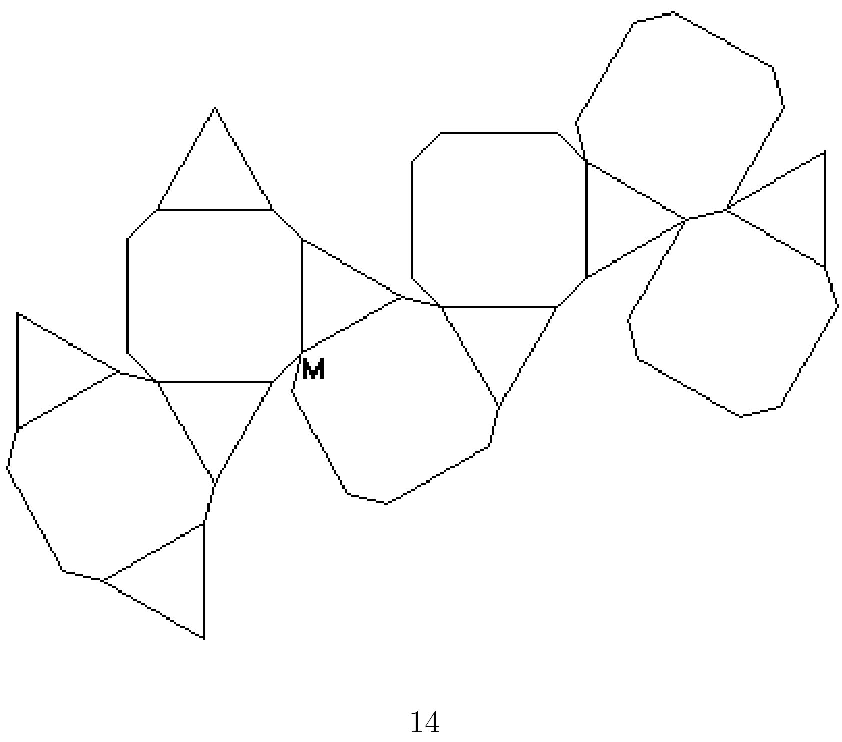
c) Les méthodes (les algorithmes) permettant les manipulations des graphes sont parfois elles-mêmes incluses dans la structure d'un sommet : Un sommet sait envoyer un "messager" parcourir le graphe à la recherche d'un autre sommet, il sait s'inserer dans le graphe et s'auto-détruire en conservant la connexité du graphe.

On citera parmi les très nombreux algorithmes sur les graphes : L'algorithme de Floyd qui détermine les plus courts chemins entre tous les sommets.

Des exemples de graphes utilisés en géométrie algorithmique sont les graphes d'incidences des complexes cellulaires (les polyèdres par exemple).

Un tel graphe peut-être utilisé, par exemple pour réaliser un programme capable de dessiner un patron d'un polyèdre convexe quelconque (on prouve qu'un tel patron est lui-même un graphe connexe planaire)

Le logiciel de géométrie "KAPPA" écrit par Denis Lieutier sait dessiner un patron d'un polyèdre convexe quelconque. Il est intéressant d'un point de vue pédagogique de comparer les graphes d'incidence du polyèdre et d'un de ses patrons.



IX-Les graphes en Mathématiques.

Bien entendu, la Théorie des Graphes s'est constituée comme une branche à part entière des Mathématiques. Au regard de ses applications et pour elle-même, on comprend que son développement soit un domaine très actif et très vivant, d'autant plus que les graphes sont finalement d'apparition assez récente.

En particulier, elle a certainement contribué au développement de la Combinatoire, de la Géométrie Combinatoire, à l'étude des configurations extrémales ayant des propriétés données, et à l'essort de la Théorie de Ramsey.

Mais les graphes ont également une utilité dans d'autres domaines des Mathématiques, y compris dans les plus "traditionnels", par les nouveaux résultats qu'ils ont permis d'obtenir ou par le nouvel éclairage qu'ils ont donnés à d'autres déjà connus. On a déjà entrevu ci-dessus que l'Algèbre, la Topologie ou les Probabilités (chaines de Markov) ont des interactions fécondes avec la Théorie des Graphes.

Que la Géométrie soit un domaine d'application de la Théorie des Graphes ne surprend sans doute pas. Donnons trois exemples, qui relèvent de la Géométrie "classique" :

-Le célèbre *problème des 13 sphères,* consistant à déterminer le nombre maximal de sphères unités qui, sans point intérieur commun, peuvent être simultanément tangentes à une sphère unité donnée, et qui a opposé David Gregory et Isaac Newton peut-être résolu de façon élémentaire et élégante grâce aux graphes ([4]).

- Le *problème de Borsük,* qui consiste à déterminer le nombre minimal de parties nécessaires pour qu'il soit alors possible de partager un domaine borné donné de $\mathbb{R}^n$ en parties "plus petites" (on pourra consulter l'article de D.Lieutier disponible sur le site de l'académie de Versailles).

- Le *problème des gardes de musée (art gallery theorem)* de Chvátal, ou combien faut-il de gardes pour surveiller un musée (mêmes références)?

De façon peut-être plus inattendue, l'Arithmétique et l'Analyse bénéficient également de certains apports de la théorie des graphes.

En Arithmétique, citons par exemple un résultat célèbre d'Erdös et Selfridge [5] dont la démonstration utilise à plusieurs endroits le recours aux graphes, résolvant ainsi une conjecture vieille de plus de 150 ans :

Un produit d'au moins deux entiers consécutifs strictement positifs n'est jamais une puissance non triviale d'entier (c.à.d. autre qu'une puissance 0 ou 1).

En Analyse, on peut mentionner une preuve rapide du Théorème du point fixe (ou Théorème de Brouwer), via le Lemme de Sperner ([4]).

Pour passer le temps : Un exemple de recherche de chemin maximal.

L'Education Nationale cherche à organiser un séminaire de présentation de ses nouveaux programmes à un certain groupe de professeurs. Différentes tâches doivent être réalisées, et certaines d'entre elles ne peuvent être commencées avant que d'autres de soient terminées. L'ensemble de ces tâches, leur durée, et leur succession sont rassemblées ci-dessous :

Tâche	Description de la tâche	Tâche(s) antérieure(s)	Durée en jours
A	Taper la lettre de convocation	D	1
B	Elaborer le programme de la journée	–	2
C	Envoyer la lettre de convocation	A	1
D	Concevoir la lettre de convocation	B	1
E	Rechercher les intervenants	B	8
F	Réaliser les badges	L	3
G	Concevoir l'argumentaire	B	18
H	Constituer le dossier remis à chaque participant	G, K	18
I	Choisir un lieu pour le séminaire	K	1
J	Choisir un lieu pour déjeuner	I	2
K	Etablir la liste des participants	–	1
L	Etablir la liste et l'ordre des intervenants	E	1
M	Préparer la salle (projecteur, tableau, chaises,...)	N, P	3
N	Réserver la salle	I	1
O	Réserver le restaurant	J	1
P	Réception des réponses à la convocation	C	30

On considère le graphe $\mathcal{G}$ orienté dont les sommets sont les tâches, et dont les arêtes représentent les relations d'antériorités.

1) On note T l'ensemble de toutes les tâches.

Soit T_0 l'ensemble des tâches sans prédécesseur. On note T_1 l'ensemble des tâches dont les seuls prédécesseurs sont dans T_0, et de façon générale, si pour $k \geq 0$, on a $T_k \neq \emptyset$, on note T_{k+1} l'ensemble des tâches dont les seuls prédécesseurs sont dans T_k.

Déterminer $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$.

Remarques : - On établit ainsi un *dictionnaire des précédents.*
- Si la tâche X appartient à T_k, on dit qu'elle est de *niveau* k.

2) On considère maintenant le graphe orienté et pondéré $\mathcal{G}'$ qui possède tous les sommets et toutes les arêtes de $\mathcal{G}$, et deux sommets supplémentaires correspondant :

- l'un à une tâche virtuelle nommée *Début*, de durée 0, et reliée à chacune des tâches qui appartiennent à T_0.
- l'autre à une tâche virtuelle nommée Fin, et réliée à chacune des autres tâches qui n'ont pas de successeur dans $\mathcal{G}$.

Si une arête relie les tâches X et Y, son poids est la durée de la tâche X.

a) Représenter le graphe en disposant à chaque fois verticalement les éléments d'un même niveau, et de gauche à droite selon les niveaux croissants (On considérera que la tâche *Début* est de niveau -1, et que la tâche Fin est de niveau 6).

b) Déterminer la longueur maximale d'un chemin permettant de relier *Début* à Fin.

c) Indiquer le(s) chemin(s) critique(s).

Références.

[1] L.R.Foulds, *Graph theory applications*, Springer.
[2] P.Bornsztein, *Mégamath*, Vuibert, ex. R.26, p.8 et 80-83.
[3] H.G.Landau, On dominance relations and the structure of animal societies III. The condition for a score structure, *Bull.Math.Biophys.*, 15 (1953), p.143-148.
[4] M.Aigner, G.M.Ziegler, *Proofs from the Book*, Springer.
[5] P.Erdös, J.L.Selfridge, The product of consecutive integers is never a power, *Illinois Journal of Math.*, 1975, p.292-301.
[6] F.S.Roberts, *Graph theory and its applications to problems of society*, Society of industrial and applied mathematics.
[7] R.L.Graham, M.Grötschel, L.Lovász, *Handbook of Combinatorics, vol.II*,

North-Holland.
[8] D.Lieutier, Graphe sur un ensemble fini de points du plan, *Quadrature*, n°42, p.13-18.
[9] D.Lieutier, Arbres binaires et dictionnaires, *Quadrature*, n°43, p.17-21.
[10] D.Lieutier, Graphes et géométrie, *Quadrature*, n°44
[11] G.Sabah, *L'intelligence artificielle et le langage*, Hermes.
[12] G.Massini et al., *Les langages à objets*, iia-InterEditions.
[13] M.Divay, *Algorithmes et structures de données*, Dunod.
[14] C.Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod.
[15] M.Gondran, M.Minoux, *Graphes et algorithmes*, Eyrolles.