01 - Lire la nature - Read the Nature – 01

01-1 Formes de la nature

Pourquoi une bulle de savon qui flotte dans l'air semble-t-elle être une sphère parfaite ?
Pourquoi la nature crée-t-elle des structures régulières et des mouvements prévisibles comme la chute des corps ?
Pour répondre, les mathématiciens utilisent des modèles simples : cercle et sphère, carré et cube, hélice, coniques… De l'infiniment grand à l'infiniment petit, du télescope au microscope, la nature révèle des formes de plus en plus complexes, des spirales aux fractales. Des nombres, des relations comme les équations différentielles tentent d'expliquer pour mieux les comprendre des phénomènes aussi complexes que la vie sur Terre ou l'organisation de l'Univers.

01-2 Le monde est-il fractal ?

Comment représenter la forme d'une rivière très sinueuse, d'une côte très découpée ? la forme d'un nuage, d'une flamme ou d'une soudure ? Peut-on calculer la dimension des galaxies dans l'Univers ? Comment varie l'activité sur le réseau Internet ? Observez une feuille de fougère : elle est construite par reproduction d'un même motif à des échelles de plus en plus petites. Une telle structure qui apparaît souvent dans la nature a permis à Benoit Mandelbrot de développer la géométrie fractale.
Les fractales sont des formes telles que les détails se reproduisent à différentes échelles.

01-3 Tous en orbite !

Quelles trajectoires décrivent les planètes, les satellites naturels ou artificiels de notre univers ?
Kepler a montré que ces trajectoires sont des coniques – ellipses, paraboles, hyperboles.
Les comètes qui reviennent périodiquement se déplacent sur des trajectoires elliptiques très aplaties. Pour quitter l'attraction du système solaire, un satellite doit quitter une trajectoire elliptique pour se placer sur une trajectoire hyperbolique.
Pour suivre et piloter les satellites artificiels de plus en plus nombreux, on utilise des chapelets d'antennes … paraboliques.

02- Paver un sol - Tilings & Symmetries - 02

02-1 Sous les pavages, la liberté ?

Peut-on recouvrir un sol avec n'importe quelle forme de carreaux, sans trou ni chevauchement? Beaucoup de formes conviennent, mais pas toutes comme par exemple le pentagone régulier. Les pavages qui se répètent périodiquement par translations sont bien compris et leurs symétries internes permettent d'en distinguer 17 types. Leur étude relève de la théorie des groupes, due à Evariste Galois. Si l'on veut paver avec plus de liberté - de façon non périodique – l' étude est loin d'être terminée. Ainsi, existe-t-il de tels pavages n'utilisant qu'une seule forme ? Mystère ! Les pavages trouvent des applications en mathématiques, en cristallographie, en théorie du codage...
- Sir Roger Penrose (born in 1931 in Colchester)
- Evariste Galois (1811-1832)

02-2 La nature est symétrique ?

Pourquoi la double hélice de l'ADN tourne-t-elle toujours dans le même sens ?
Pourquoi un visage et son image dans un miroir ne sont-ils pas superposables ?
De l'infiniment petit à l'infiniment grand, les symétries sont présentes dans de nombreuses modélisations mathématiques. Mais la nature présente rarement des symétries parfaites. Certaines nous échappent, d'autres sont commodes pour étudier leurs modèles. Les formes vivantes qui tournent à droite sont beaucoup plus fréquentes. Cet excès d'asymétrie pourrait s'expliquer par le hasard originel ou par l'asymétrie des forces physiques : la question reste ouverte.

02-3 Où suis-je ?

Combien faut-il de satellites en orbite autour de la Terre pour savoir à tout instant où l'on se trouve ? Trois suffisent : ils mesurent leur distance à l'objet repéré (un quatrième donne une correction qui améliore la précision). L'objet à localiser, s'il est muni d'un récepteur portable, communique avec les satellites par ondes hertziennes. Il se trouve à l'intersection des 3 sphères ayant pour centre chacun des satellites et pour rayon leur distance à l'objet. Les système GPS (Global Positioning System) ou russe -et bientôt, le système européen Galileo- permettent ainsi à tout instant de savoir où l'on se trouve.

03 - Filing a Space - Remplir l'esapce - 03

03-1 Bien empiler les oranges !

Comment empiler des oranges et occuper le moins de volume possible ?
Sur les étalages, les oranges occupent 74% de l'espace. C'est la disposition “cubique à faces centrées” que connaissent bien les cristallographes. Kepler pensait déjà, il y a 4 siècles, que cette disposition était la meilleure. Cela n'a été démontré qu'en 1998 en étudiant, à l'aide d'ordinateurs, plus de 5000 cas particuliers. Ce problème de la vie courante a des applications qui vont de l'étude des structures cristallines à la théorie des codages informatiques. Mais si l'on veut remplir une boîte de forme quelconque, le problème est encore sans solution générale.
• Johannes Kepler (1571-1630)

03-2 La sphère, de l'atome aux cristaux

Voûte céleste, Terre, atomes et particules élémentaires…
Pourquoi la sphère (en tout ou partie) est-elle très souvent utilisée pour représenter des formes de la nature ?
A l'échelle microscopique, des phénomènes naturels peuvent être modélisés par des mouvements de sphères indéformables, librement mobiles ou subissant des collisions sans perte d'énergie. Si les atomes sont modélisés par des sphères, les cristaux sont considérés comme des empilements ordonnés, le plus souvent périodiques, d'atomes. Ces phénomènes sont comme les éléments d'un jeu de billard infini à deux ou trois dimensions : ces modèles permettent l'étude des gaz, des liquides et de certains solides.

03-3 Empilements : un problème complexe

Entre un kilo de café en grains et un kilo de café moulu, quel est celui qui occupe le plus petit volume ?
Ce petit problème prend des dimensions importantes si on veut transporter des tonnes de café !
Le problème devient très complexe si les objets sont de dimensions et de formes différentes et sont à transporter dans des containers bien définis. Inversement, comment donner aux objets les meilleures dimensions pour remplir un volume donné ? Ces problèmes, conditionnés aussi par le poids des objets, les coûts de transport, les frais de stockage, etc., n'ont pas encore trouvé de solution.

04 - Relier d'un trait - Connections - 04

04-1 Des points et des traits

Königsberg, 1736 : est-il possible de parcourir la ville en traversant chacun de ses sept ponts une fois et une seule ?
Pour résoudre ce problème, à l'origine de la théorie des graphes, Euler retient l'information essentielle : il y a quatre quartiers séparés par l'eau du fleuve, soit quatre “points” à relier par 7 traits qui symbolisent les ponts.
Le problème devient : sur ce dessin existe-t-il un chemin passant une seule fois par chaque trait ?
Ce fut l'amorce de la théorie des graphes. La réponse d'Euler : combien y a-t-il de points où aboutit un nombre impair de traits ? Il n'y a de solution que si ce nombre est égal à zéro ou à deux !
• Leonhard Euler (1707-1783)

04-2 Quatre couleurs suffisent !

Combien de couleurs suffisent à colorier une carte, de telle façon que deux pays voisins soient de couleurs différentes ?
La théorie des graphes a permis de modéliser ce problème et de réduire le nombre de cas à étudier. Mais c'est grâce à l'ordinateur que l'on a pu analyser un grand nombre de situations.
La théorie des graphes est utilisée pour modéliser et étudier des situations très concrètes comme les réseaux de télécommunication, les circuits électroniques, les réseaux de distribution – eau, gaz, électricité, courriers…- et de nombreux problèmes de logistiques, transport, production.

04-3 Allo ! M'entends-tu ?

Dans un réseau de communications locales, comment circule votre appel téléphonique ?
Il se propage de relais en relais jusqu'au commutateur le plus proche de votre correspondant qui est prévenu par une sonnerie.
Dans une ville, ces nœuds de réseaux sont placés au mieux en tenant compte de la topologie irrégulière des rues. Chaque nœud définit une zone de proximité d'appel sous forme d'un polygone qui est relié aux autres par voisinage.
Ces zones définissent un pavage de la ville, appelé mosaïque de Voronoï. Si on relie ces commutateurs entre eux de telle sorte qu'ils appartiennent à des zones voisines, on met en place un graphe qui représente les cables le long desquels l'appel va cheminer.
Graphes, probabilités, géométrie s'associent ici pour vous permettre de communiquer dans des conditions optimales !

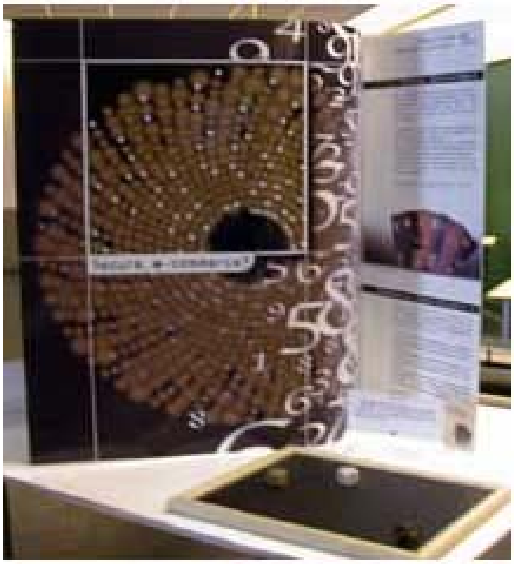
05 - Pourquoi calculer ? - Calculating - 05

5-1 Trompé par mon ordinateur !!!

Quels nombres utilisons-nous aujourd'hui dans la vie quotidienne ?
Pour compter, nous avons utilisé les nombres entiers puis les décimaux, les réels et même les nombres complexes. Qu'en est-il dans notre vie de tous les jours ? Que l'on utilise une calculette ou un ordinateur puissant ?
Sur le marché, il vaut mieux savoir faire un rapide calcul mental. L'ordinateur, lui, n'utilise que des nombres décimaux avec seulement quelques décimales.
Les lois mathématiques n'y sont plus respectées.
Du comptable à l'ingénieur aéronautique, les erreurs d'approximation doivent alors être maîtrisées, de l'infiniment petit à l'infiniment grand.
Et, dans ce domaine, les outils informatiques ne sont pas des outils fiables.

5-2 @cheter en toute sécurité ?

Peut-on acheter sur internet en toute sécurité ?
Avec l'essor du web, la cryptographie - science du codage - est devenue un enjeu capital des banques et de nos achats en ligne.
Le secret des cartes bancaires est basé sur un nombre de plus de 100 chiffres, produit de 2 nombres premiers*, indispensables pour le décodage.
Les progrès de l'informatique permettent aujourd'hui de trouver, de plus en plus vite, les diviseurs de nombres de plus en plus grands.
Mathématiciens, physiciens et informaticiens cherchent de nouvelles méthodes de codages sécurisés, utilisant en particulier les lois étranges de la physique quantique.
Est premier tout nombre entier qui n'est divisible que par lui-même et 1. Les premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23… et il y en a une infinité.



5-3 Débruitage à Corfou

Comment récupérer des images numériques qui ont été détériorées à la suite de problèmes d'appareil photo, de transmission ou de réception ?
Comment envoyer et recevoir des images de bonne qualité par Internet et Haut débit ?
Pour cela, les mathématiciens mettent au point des algorithmes de débruitage d'images qui s'illustrent grâce à des méthodes des cartographes : l'intensité lumineuse de chaque pixel de l'image est traduite par une "altitude".
L'image se traduit par une carte en relief où le bruit correspond à un terrain accidenté. On régularise le relief en conservant les "lignes de niveaux" essentielles et l'on obtient une image sans les déteroriations.

06 - Construire - Constructing - 06

6-1 Tout en douceur !

Dans les échangeurs d'autoroutes, comment faire une chaussée qui soit plus douce et plus sûre pour une conduite plus efficace ?
En voiture, quand on roule à vitesse constante et que l'on tourne les roues uniformément, la voiture suit une courbe appelée "clothoïde".
Ce tracé minimise les forces centrifuges et permet de relier en douceur une ligne droite à une ligne courbe.\÷ L'utilisation de la clothoïde permet une conduite plus facile et plus efficace. Cette courbe est aussi employée pour les rails de métro, les pistes de rollers…

6-2 Des ponts de génie !

Comment construire des ponts toujours plus longs, toujours plus audacieux ?
Les premiers ponts utilisaient le bois et la pierre. Le fer puis l'acier et le béton sont ensuite apparus.
De nouveaux problèmes se posent : comportement dynamique des ponts haubanés, conduite complexe des chantiers de construction.
L'ordinateur, et sa puissance de calcul, permettent de résoudre maintenant, pas à pas, ces problèmes et de réaliser des ponts qui battent tous les records : Storebœlt East Bridge au Danemark (avec une portée de 1624 m), le viaduc de Millau en France (343 m de hauteur)…

6-3 Révolutionnaire, le moteur rotatif !

Les moteurs à pistons travaillent de haut en bas. Pour les moteurs rotatifs, l'énergie est produite par rotation. Comment se font la compression et la combustion ?
Le volume de gaz dans chaque chambre change avec les mouvements du piston.
Le logement est en forme d'une "épitrochoide": une courbe tracée par un point d'un disque qui roule à l'extérieur d'un cercle fixe.
Un rotor triangulaire tourne autour d'un axe, l'un de ses cotés touchant le logement à tout moment.
L'espace compris entre le logement et le rotor est divisé dans trois chambres de combustion.

07 - Optimisation - Estimer - Prévoir - 07

7-1 Tous dans la moyenne ?

Pourquoi la forme de cette courbe est-elle si connue ?

Pourquoi est-elle fondamentale en statistique ?

Si on classe les habitants d'une ville ou d'un pays, les feuilles d'un arbre…, selon une caractéristique (taille, poids, QI…), plus on s'approche de la moyenne sur le critère considéré et plus il y a d'individus. Plus on s'en éloigne et moins il y en a. Aux extrémités, il n'y a presque personne.
La représentation graphique de cette réalité est une courbe de Gauss.
Ce caractère universel de cette courbe provient d'un résultat de Laplace qui dit que la distribution de Gauss est l'accumulation de nombreuses petites contributions indépendantes.

• Pierre Simon de Laplace (1749-1827)
• Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

7-2 Comment acheter à crédit ?

Empruntez 10.000 €uros à votre banque. Est-il plus intéressant pour vous de rembourser à taux fixe ou taux variable ?

Sans algèbre, comment s'y retrouver ? Les mathématiques interviennent pour concevoir et interpréter de tels contrats financiers. Les ignorer, c'est être sans défense devant les pratiques commerciales.
La situation est identique, mais plus compliquée, avec les placements : vous confiez à la banque 10.000 €uros. En échange elle s'engage à vous rendre dans quelques années cette somme augmentée - éventuellement - par l'évolution d'un des indices monétaires ou boursiers.

Qui est gagnant?

7-3 Gagnez à l'Euroloto ?

Recette : Prenez un avion à destination de l'Allemagne*

1. Prenez un annuaire du pays
2. Montez dans l'avion
3. Dès la frontière atteinte, ouvrez l'annuaire
4. Choisissez un nom au hasard, notez son téléphone et glissez-le dans une poche
5. Mettez un parachute
6. Ouvrez la porte de l'avion et… sautez !
7. A l'atterrissage, marchez au hasard droit devant vous
8. Demandez à la 1ère personne rencontrée son nom et son numéro de téléphone
9. Comparez avec ce que vous aviez noté
10. Coup de chance, ce sont les mêmes !

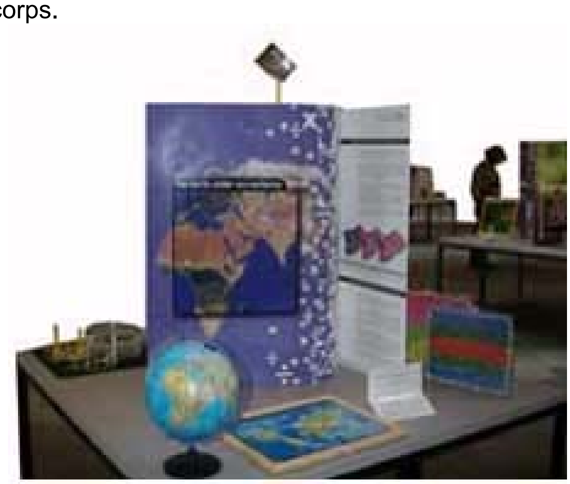
Vous avez gagné à l'Euroloto !

L'Allemagne compte environ 82 millions d'habitants.
Il suffit d'une chance sur … 76 275 360 pour gagner le gros lot !

08 - Optimiser - Optimisation - 08

8-1 La nature est économe

Une bulle de savon est sphérique, les corps stellaires sont quasi sphériques ; pourquoi ?
A périmètre constant, le cercle délimite la surface de plus petite aire. A volume constant, la sphère a la plus petite surface.
Dans la nature, les efforts tendent à être les plus faibles.
Une masse liquide en équilibre relatif, une bulle d’huile en suspension ou en rotation dans un liquide, des planètes en formation, génèrent des formes sphériques, uniques ou multiples.
Ces formes correspondent à des minima de l’énergie potentielle qui est proportionnelle à la surface des corps.



8-3 Des formes efficaces

Pourquoi la structure en nid d'abeille est-elle de plus en plus utilisée ? Les abeilles ont-elles trouvé la solution optimale ?
Les formes en nid d'abeille ont comme propriétés avantageuses d'être légères, résistantes et rigides.
De telles formes, faites en aluminium, sont employées dans les structures des Airbus A380 et des TGV, les parois de satellites...
En carton ou polyvinyle, le nid d'abeille est couramment utilisé pour les portes et les palettes de transport.
La cellule du nid d’abeille n’est pourtant pas la forme la plus économique pour occuper un volume donné.
On a depuis trouvé mieux sans connaître encore la meilleure forme.

8-2 La Terre sous surveillance

Comment trouver une “bonne” représentation de la Terre ? Cela dépend de l’usage que l’on veut en faire.
Après avoir trouvé des projections cartographiques adaptées par exemple à la navigation, on cherche aujourd’hui à exploiter les images prises par satellite ou par avion pour optimiser la surveillance ou la gestion des ressources.
Pour chaque pixel de l’image, on détermine le type de terrain – roche, mer, fleuve, forêt, cultures… – en croisant les informations issues des instruments de mesure (capteurs à haute résolution spatiale ou spectrale) à l’aide d’algorithmes d’apprentissage.
Les modèles construits sont alors validés par des observations sur le terrain.

09 - Prouver - Démontrer - Prooving - 09

9-1 Preuves et démonstrations

Le doute existe-t-il en mathématiques ?
Peut-on s'y satisfaire d'un faisceau de présomptions même si c'est à 99%?
La démonstration est à la base de l'activité du mathématicien et en fait son originalité.
Des premières preuves simples, écrites en quelques lignes, et compréhensibles par un bachelier, nous sommes aujourd'hui passés à des preuves qui représentent des centaines de pages, qui nécessitent l'utilisation d'ordinateurs et qui ne sont vérifiables que par un petit nombre de spécialistes.
La complexité du monde interroge de plus en plus le mathématicien qui doit, pour y répondre, mettre en œuvre des hypothèses et des modèles dont il faut ensuite prouver la pertinence.

9-2 de Pythagore à Wiles

Comment démontrer des hypothèses qui semblent vraies ?
Existe-t-il des nombres entiers tels que X2 + Y2 = Z2 ? Tels que Xn + Yn = Zn pour n supérieur à 2 ?
Les Grecs ont été les premiers à essayer de résoudre de tels problèmes. Ainsi, Pythagore donna son nom au théorème sur "le Carré de l'hypoténuse…" dont Euclide a fourni la plus ancienne preuve connue.
Fermat formule ensuite l'hypothèse que ce résultat n'est pas généralisable. Wiles démontre cette conjecture en 1994 !
Il utilisa pour cela les résultats des plus récentes recherches dans plusieurs domaines des mathématiques.
Les mathématiciens s'efforcent régulièrement de faire connaître les grands problèmes qui restent à démontrer.

- Pythagore (6è avt J.-C.)
- Euclide (3è avt J.-C.)
- Pierre de Fermat (1601-1665)
- Andrew Wiles (Cambridge, 1953)

9-3 Vrai et pourtant… indémontrable!

Pouvons-nous toujours démontrer quelque chose que nous savons être vrai?
En 1931, Kurt Gödel, dans un véritable coup de théâtre, a répondu par la négative avec son fameux théorème dit "d'incomplétude".
Il a prouvé que les deux notions de vérité et de démontrabilité ne coïncident pas en découvrant une formule sur les nombres entiers qui est vraie mais indémontrable dans l'arithmétique élémentaire.
Plus surprenant, Gödel a aussi montré dans le même esprit qu'en arithmétique, on ne peut ni réfuter ni démontrer qu'on n'aboutira jamais à une contradiction.
L'arithmétique élémentaire est de plus indécidable.
Cela entraîne par exemple qu'il est impossible d'écrire un programme informatique qui vérifierait si une formule quelconque sur les entiers est vraie ou non.

- Kurt Gödel (1906-1978)