

L'enseignement des mathématiques, entre restitution, imitation et invention

Relisant l'essai sur la psychologie de l'invention en mathématiques de Jacques Hadamard (paru en 1943, publié en français en 1959), et la conférence de Henri Poincaré sur l'invention mathématique (1908), quelques réflexions me sont venues à l'esprit, que j'aimerais vous confier. Il est remarquable que malgré la distance ces textes paraissent toujours d'actualité, je dirais même plus que jamais d'actualité.

L'activité mathématique des élèves, telle qu'elle est organisée par les professeurs, se situe naturellement entre la restitution, l'imitation et l'invention. A chacune de ces composantes sont accordés un poids, une importance qui varient selon les maîtres et selon les époques, et il est clair qu'elles participent toutes à la formation. Cette formation a pour objectif de rendre les élèves capables de comprendre les théories mathématiques les plus simples, d'utiliser de manière correcte et efficace les modèles déjà construits, laissant aux professionnels la recherche de nouveaux modèles, de nouvelles théories.

Hadamard, comme Poincaré, définissent ce qu'il faut entendre par comprendre, et je ne résiste pas au plaisir de les citer :

"Comprendre la démonstration d'un théorème, est-ce examiner successivement chacun des syllogismes dont elle se compose et constater qu'il est correct, conforme aux règles du jeu ? Oui, pour quelques-uns ; quand ils auront fait cette constatation, ils diront : j'ai compris. Non pour le plus grand nombre ; presque tous sont beaucoup plus exigeants, ils veulent savoir non seulement si tous les syllogismes d'une démonstration sont corrects, mais pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre plutôt que dans tel autre. Tant qu'ils leur semblent engendrés par le caprice et non par une intelligence constamment consciente du but à atteindre, ils ne croient pas avoir compris. Sans doute, ils ne se rendent pas bien compte eux-mêmes de ce qu'ils réclament et ils ne sauraient formuler leur désir, mais s'ils n'ont pas satisfaction, ils sentent vaguement que quelque chose leur manque "

De ce point de vue, si elle est limitée à la restitution, l'activité des élèves est de peu d'intérêt. Les résultats appris, les démarches retenues restent ponctuels, cloisonnés et ne se transposent pas dans d'autres situations. C'est un dressage aux règles hors contexte qui ne rencontre guère de succès auprès des élèves tant du point de vue de leur agrément que des compétences qu'ils en tirent.

Avec l'imitation, on pénètre dans un domaine plus riche. Le fait d'étudier les travaux mis au point et reconnus, de pénétrer dans la pensée créatrice de quelques uns, d'être capable ensuite de reproduire les démarches que l'on a comprises (même au sens limité du terme), voire de les adapter, constitue une voie d'accès à un progrès dans la compréhension, c'est à dire à la perception de la construction générale d'une preuve ou d'une théorie, à la perception de la cohérence et de l'harmonie des résultats obtenus. Comme dans tous les arts, on étudie le patrimoine en même temps que l'on s'essaie à produire soi-même.

J'emprunterai maintenant à Poincaré ce qu'il dit de l'invention mathématique qu'il a si bien décrite :

Voir le texte photocopié

Pour l'enseignement, que l'exposé soit oral ou écrit, il est habituel mais aussi le plus souvent nécessaire de ne donner que la forme la plus aboutie du raisonnement, celle qui a subi l'épreuve de la vérification attentive, et qui semble la plus directe, la plus claire, la mieux "finie". C'est ainsi que, par exemple, lorsque la preuve est longue, les résultats intermédiaires se multiplient pour en faciliter (en apparence) la lecture. En conséquence, le risque est grand pour l'élève de perdre de vue le fil directeur qui soutient l'architecture, de se noyer dans les détails en passant à côté de la construction. Il en va de même lors de l'introduction d'un nouvel objet. Alors que ce dernier a demandé une mise au point longue et délicate, voire difficile, une définition va être proposée (je devrais dire choisie car les possibilités sont toujours multiples) en oubliant la maturation qui fut à son origine. Pour beaucoup d'élèves, ce sera une difficulté grave, aucune nécessité ne s'imposant à eux. Pour donner un exemple, je rappelle ce que disait Jean-Pierre Kahane à propos du cercle. Il est certain que si vous connaissez simplement le cercle comme ensemble de points d'un plan situés à une distance fixe d'un point donné de ce plan, vous ignorez presque tout du cercle, bien que cette définition soit parfaite. Il vous manquera de savoir qu'il a une infinité d'axes de symétrie, qu'il est la courbe fermée simple qui enferme pour une longueur donnée le domaine d'aire maximum etc.

La présentation "rédigée" des théories mathématiques, ou de bien des cours, ne permet guère de comprendre, du moins n'aide pas celui qui, tout en étant insatisfait (ainsi que le disait Poincaré), a du mal à faire la synthèse des éléments d'une preuve morcelée, à faire de lui-même les rapprochements éclairants entre divers sujets vus à des moments différents.

Les mathématiques sont belles et utiles. Il va de soi que la plupart des jeunes gens ne deviendront pas de professionnels des mathématiques et qu'ils se contenteront d'utiliser avec discernement et fruit les modèles existants. Néanmoins, la place des mathématiques grandissant dans les domaines les plus divers, des sciences aux sciences humaines et sociales, si l'invention n'est accessible qu'à un tout petit nombre, il semble indispensable toutefois de développer dans l'éducation mathématique d'aujourd'hui la part du "comprendre". L'objectif essentiel de l'enseignement des mathématiques devrait être de faire sentir la nécessité, la cohérence, l'harmonie qui gouvernent cette activité.

Je crois pour terminer que des dispositifs comme celui des olympiades participent à cet effort. La préparation des olympiades, dégagée de l'évaluation, permet aux professeurs comme aux élèves de ne pas rester au stade de l'insatisfaction, de comprendre un peu mieux et de bâtir à leur tour en s'inspirant des modèles qui leur

sont accessibles, et pourquoi pas pour certains en inventant. Je n'ai pas besoin d'ajouter qu'alors la passion peut les gagner.

Je voudrais maintenant remercier très vivement les jeunes élèves qui ont participé aux olympiades. S'agissant d'une activité qui se place en dehors du temps scolaire, c'est au prix d'un effort mais aussi, je l'espère, d'un plaisir en retour. Mes remerciements vont aussi à leurs professeurs qui n'ont pas ménagé leurs soins et leur temps, et à leurs parents qui les ont soutenus. Je remercie aussi avec force les personnes qui ont assuré l'encadrement, le suivi, et la bonne marche de ces olympiades, en particulier nos inspecteurs régionaux qui y consacrent une bonne part de leur énergie. Je remercie enfin et avec chaleur Monsieur le Recteur d'être présent aujourd'hui parmi nous pour remettre leurs prix aux lauréats, que je félicite avec beaucoup d'émotion.