Quotients - Proportionnalité - Grandeurs

André Pressiat,
Maître de conférence à l'IUFM d'Orléans-Tours
Chercheur à l'INRP

Présentation du document

Le texte qui suit est un résumé de l'intervention que j'ai faite de la réunion du 6 décembre 2002 au lycée Louis de Broglie à Marly devant des professeurs de mathématiques, enseignant en collège, de l'académie de Versailles.

Il porte sur des points très importants de l'enseignement des mathématiques en collège, à propos desquels les équipes d'établissement doivent faire des choix qui, trop souvent, sont limités à l'horizon d'un niveau de classe donné. Il est alors difficile d'installer une cohérence de l'enseignement pour l'ensemble du collège, surtout lorsqu'une “spécialisation” des professeurs les amène à ne plus enseigner en 6^{e} ou en 3^{e}.

Les buts de ce texte sont les suivants :

- mieux distinguer l'aspect “quotient” d'un nombre rationnel de son aspect “fraction”, en valorisant le premier. Cet aspect “quotient” était l'élément nouveau des programmes de 1985, mais dans une large mesure, il reste encore sous exploité dans les réalisations actuelles de l'enseignement (manuels et pratiques de classes) ;
- mieux mettre en évidence la pertinence de l'emploi des quotients pour traiter les questions relevant de la proportionnalité, notamment comme moyen d'étendre la portée de procédures de résolution déjà bien connues par les élèves au cas où les “multiplicateurs” ne sont plus des nombres entiers :
    - procédure “scalaire” correspondant à l'emploi de la locution “fois plus” et modélisable par la deuxième propriété de la fonction linéaire f sous-jacente :
      $$\text{pour tout } (k, x), f(kx) = k\,f(x) \;;$$
    - procédure “fonctionnelle” correspondant à l'emploi du coefficient de proportionnalité, modélisable par la définition usuelle de la fonction linéaire sous la forme :
      $$\text{pour tout } x, f(x) = ax \;;$$
- mettre en évidence les différences de difficultés conceptuelles entre ces deux types de procédure lorsqu'on s'intéresse aux grandeurs intervenant dans la situation de proportionnalité : la première, qui est la moins fréquemment utilisée, est la plus simple …
- montrer que l'on peut réduire la place accordée à la procédure dite “des produits en croix”, qui n'est en général pas justifiée ; elle n'est utilisée avec efficacité par les élèves que lorsque la mise en tableau des données leur est déjà fournie (ou suggérée), et n'est guère mobilisable dans la vie courante du fait qu'elle nécessite souvent le recours à l'écrit. Cette procédure était au cœur de la construction du corps des nombres rationnels dans les programmes plus anciens, en tant que classes d'équivalence de “fractions”, construction qui a été abandonnée au profit de celle de la notion de quotient (et ceci, dès la classe de 6^{e}, dans les programmes de 1985) ;
- proposer une façon d'introduire et d'employer la fonction linéaire en 3^{e} s'appuyant sur les points qui précèdent, différente de celle qui prévaut usuellement, et qui engendre de grosses difficultés ou un manque d'intérêt chez les élèves ;
- proposer d'autres techniques de calculs sur les grandeurs, notamment en ce qui concerne les conversions dans les grandeurs quotients, plus efficaces et plus fiables que celles qui sont en général enseignées en France.

Par ailleurs, la question de la justification des résultats usuels relatifs aux calculs sur les “nombres en écriture fractionnaire” sera abordée : ce point pose problème non seulement en 5^{e}, mais encore dans les classes ultérieures, et l'expérience a montré que l'entraînement sur ces types de calculs ne suffit pas à installer chez les élèves des techniques fiables et durables. Des justifications de type algébrique sont possibles, au moins dans des situations de reprise de l'enseignement sur ces questions, moyennant certaines précautions, et ces justifications seront rapidement évoquées.

L'ensemble du document a pour but de susciter dans les équipes de mathématiques une discussion et une réflexion sur ces questions, de faciliter d'éventuels changements dans les progressions en proposant des choix argumentés, dont les impacts sur les progressions peuvent aller de la petite modification locale à une réorganisation plus globale …

Pour des raisons de clarté et de lisibilité, les points traités sont regroupés par niveau de classe, mais la cohérence de l'argumentation n'est perceptible que par une lecture entière du texte.

QUOTIENTS
PROPORTIONNALITÉ
GRANDEURS

EN 6^{e}

Fractions ou quotients ?

Proportionnalité et quotients

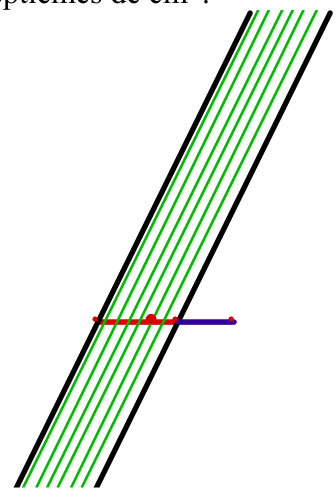
Justification des techniques de résolution d'un problème de proportionnalité
et considérations sur les grandeurs

Fractions ou quotients ?

Illustrons la différence entre les deux aspects en nous plaçant dans le contexte particulier des longueurs, facile à évoquer avec les élèves, en décrivant deux constructions d'un segment ayant pour longueur $\frac{12}{7}$ cm.

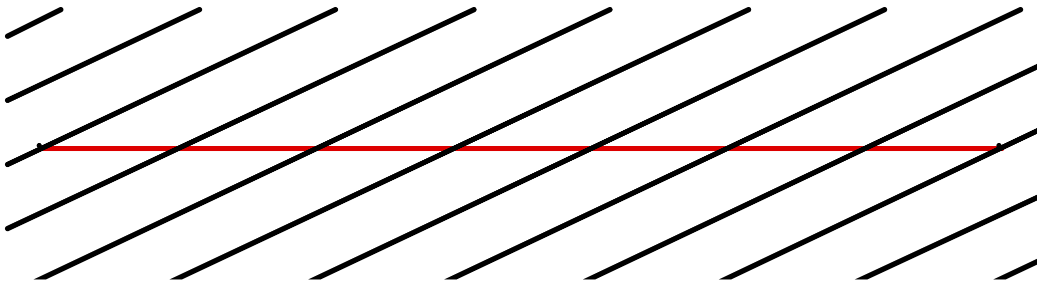
Construction sollicitant l'aspect “fraction” et l'expression “Douze septièmes”

On part d'un segment de longueur 1 cm, que l'on partage en sept segments de même longueur. Le partage évoqué ci-dessous utilise un réseau de droites parallèles équidistantes, la distance entre deux droites successives étant suffisamment petite. À partir de la longueur 1 cm partagée en sept septièmes, le report d'un segment de longueur “cinq septièmes de cm” permet de construire un segment de longueur “Douze septièmes de cm”.

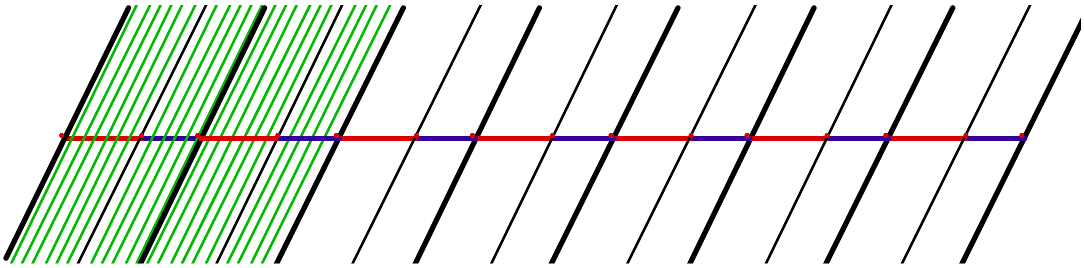


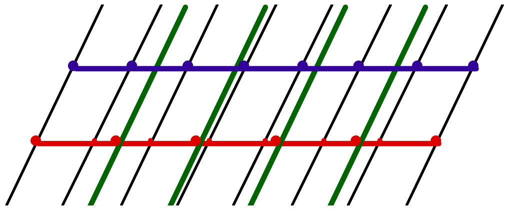
Construction sollicitant l'aspect “quotient” et l'expression “Le septième de 12 cm”

On part d'un segment de longueur 12 cm, que l'on partage en 7 parties égales. Le partage évoqué ci-dessous utilise également un réseau de droites parallèles équidistantes, la distance entre deux droites successives étant ici conforme aux habitudes. Cet outil de partage (souvent appelé “guidâne”) est en effet davantage utilisé pour cette deuxième construction que pour la première.



Les deux segments obtenus ont-ils bien la même longueur ? Les schémas ci-dessous permettent de se convaincre du fait que la concaténation de 7 segments de longueur “douze septièmes de cm” donne bien un segment de longueur 12 cm : la concaténation des 7 segments rouges permet d'obtenir un segment de longueur 7 cm ; celle des 7 segments bleus, de longueur $\frac{5}{7}$ cm, donne un segment de longueur 5 cm (ou $\frac{35}{7}$ cm).





Proportionnalité et quotients

Le paragraphe précédent montre l'intérêt des quotients pour la *mesure (exacte) des longueurs* dans une situation de partage équitable. La même problématique peut être appliquée à d'autres types de grandeurs : masse, volumes (ou capacités), …

Une autre raison d'étudier les quotients réside dans le fait qu'ils constituent de nouveaux nombres, qui vont *généraliser la notion de "nombre de fois"* souvent mobilisée dans le traitement des situations de proportionnalité.

• Depuis l'école, on sait que 14, c'est 2 fois 7, ce qu'on écrit : 7×2, et que 12 n'est pas égal à un nombre entier de fois 7. En revanche, les exemples traités précédemment dans le cadre des mesures de longueur donnent du sens à l'énoncé suivant : 12, c'est $\frac{12}{7}$ fois 7, ce que l'on note : $7 \times \frac{12}{7}$. Autrement dit, $\frac{12}{7}$ est le nombre qui, multiplié par 7, donne 12.

$$7 \times \frac{12}{7} = 12.$$

• Ces nouveaux nombres généralisent les nombres décimaux.
En effet, quel est le nombre qui, multiplié par 10 donne 12 ?
C'est 1,2 qui n'est pas autre chose que le quotient de 12 par 10 : $\frac{12}{10}$.
De même : $12{,}35 \times 100 = 1235$. 12,35 est donc le quotient de 1235 par 100. Le résultat ne surprendra pas un élève qui connaît la règle décalage de la virgule pour diviser par 100 : mais un pas reste à franchir pour qu'il considère ce résultat comme le quotient de 1235 par 100, et accepte l'écriture fractionnaire $\frac{1235}{100}$ comme une autre écriture de ce même nombre.

• En revanche, il existe des nouveaux nombres qui ne sont pas des nombres décimaux ; c'est le cas de $\frac{12}{7}$. On peut s'en convaincre en faisant la division à la main de 12 par 7, et en la poussant après la virgule : le procédé de la division ne s'arrête pas. On peut d'ailleurs s'appuyer sur cette faiblesse des nombres décimaux pour introduire les quotients de nombres entiers, ainsi que la nécessité d'une nouvelle écriture pour ces derniers : l'écriture fractionnaire.

12	7
50	1,71428571…..
10	
30	
20	
60	
40	
50	
10	

Ces nouveaux nombres vont pouvoir servir pour traiter des problèmes de proportionnalité là où les nombres entiers ou décimaux ne suffisent pas, tout en gardant les mêmes procédures de traitement. (Voir les commentaires du programme de 6^{e} : « Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur »).

Illustrons ceci avec des écrits de type tableau :

3 fois

$\boxed{\times 3}$

4 kg	12 kg
15 €	?

$\boxed{\times 3}$

1,2 fois

$\boxed{\times 1{,}2 \text{ ou } \times \frac{12}{10}}$

10 L	12 L
7,23 €	

$\boxed{\times 1{,}2 \text{ ou } \times \frac{12}{10}}$

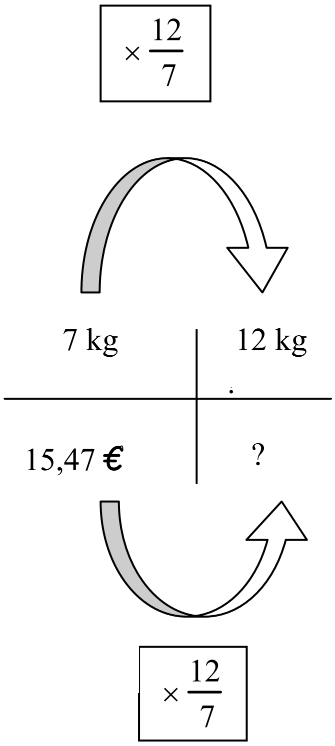
0,375 fois

$\boxed{\times 0{,}375 \text{ ou } \times \frac{37{,}5}{100} \text{ ou } \times 37{,}5\%}$

100 cl	37,5 cl
10,67 €	?

$\boxed{\times 0{,}375 \text{ ou } \times \frac{37{,}5}{100} \text{ ou } \times 37{,}5\%}$

$\frac{12}{7}$ fois



La mise en œuvre de la procédure conduit alors au calcul du produit d'un nombre d'euros par un quotient de nombres entiers.

Comment calculer 15,47 € x $\frac{12}{7}$?

- en s'appuyant sur l'aspect "fraction" de $\frac{12}{7}$, "douze septièmes" : on calcule 1 septième de 15,47 €, en divisant par 7 ; cela fait 2,21 €, puis on calcule 12 septièmes en multipliant par 12 : 2,21 € x 12 ; cela fait 26,52 €.
  En faisant abstraction des grandeurs pour tout rabattre sur le numérique, cela veut dire que l'on utilise la formule $c \times \frac{b}{a} = (c : a) \times b$ si l'on s'intéresse aux opérations à faire, ou la formule $c \times \frac{b}{a} = \frac{c}{a} \times b$, si l'on remplace la première opération à faire par son résultat exact, le quotient de c par a. Le lecteur comprendra que la première formule est plus facile à interpréter par un élève de 6^{e}, alors que la deuxième peut le rendre perplexe : pour multiplier un nombre par un quotient, elle conduit à calculer le produit d'un autre quotient par un nombre …
- s'appuyer sur l'aspect "quotient" de $\frac{12}{7}$, "le septième de douze" : on calcule 12 fois 15,47 €, en multipliant par 12 ; cela fait 185,64 €, puis on en calcule le septième, en divisant par 7 : 185,64 € ÷ 12 ; cela fait 26,52 €.
  En faisant abstraction des grandeurs pour tout rabattre sur le numérique, cela veut dire que l'on utilise la formule : $c \times \frac{b}{a} = (c \times b) : a$ si l'on s'intéresse aux opérations à faire, ou la formule $c \times \frac{b}{a} = \frac{c \times b}{a}$, si l'on remplace la deuxième opération à faire par son résultat exact, le quotient de $c \times b$ par a.
- en utilisant la calculatrice : on calcule $\frac{12}{7}$. La calculatrice affiche $\frac{12}{7} =_{c}$ 1,714285714. Puis on multiplie le nombre ainsi obtenu par 15,47 (€) : cela fait 26,52 (€).

Remarque : si l'on retape le nombre affiché avant de le multiplier par 15,47, on trouve le même résultat. Seul le professeur a un savoir suffisant pour se poser la question : et si on calcule avec la calculatrice 1,714285714 x 15,47 – 26,52, va-t-on obtenir 0 ? La calculatrice affiche $-4{,}42^{E}-9$ … ce qui montre que 1,714285714 (nombre affiché par la calculatrice) n'est pas égal à $\frac{12}{7}$, mais en est une valeur approchée suffisamment proche pour que l'écart entre la valeur exacte et la valeur affichée, une fois qu'on le multiplie par 15,47 donne un nombre de l'ordre de 0,000 000 004.

Une récente recherche INRP a montré que les résultats obtenus par des élèves de 6^{e} dans la résolution de problèmes de proportionnalité à l'aide des quotients employés comme opérateurs sont nettement meilleurs lorsque la calculatrice leur est autorisée. Il convient donc, dans la résolution de ce type de problèmes, que le professeur la fasse utiliser sans réticence par les élèves.

La citation suivante, extraite d'un ouvrage d'Henri Lebesgue écrit à l'intention des professeurs, fournit une légitimation de l'enseignement des nombres rationnels par leur aspect “quotient” (il emploie le mot “rapport” à la place du mot “quotient”), ainsi qu'une incitation à l'emploi effectif des calculs approchés à une époque où les calculatrices n'existaient pas …

Citation d'Henri Lebesgue

(*La mesure des grandeurs*, Librairie Albert Blanchard, 1975)

« Dans les petites classes, la réforme que je propose peut sembler se réduire au remplacement du mot fraction par un autre : rapport par exemple. Car il faudrait bien s'occuper des propriétés

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\,;\,\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$$

Et énoncer les règles correspondantes relatives au calcul du rapport des deux nombres (quelconques et non plus nécessairement entiers). Pourtant, la réforme serait effective si l'on consentait à ce que les enfants n'étudient plus deux numérations, la numération des $n^{\text{ièmes}}$ pour les nombres commensurables et la numération décimale ; si on leur permettait d'écrire 0,428 là où la réponse est $\frac{3}{7}$.

Sans doute *a* divisé par *b*, *a* sur *b*, se lit encore *a* *b*-ièmes quand *a* et *b* sont entiers, mais cette locution n'oblige pas plus à développer toute la théorie des fractions que la locution quatre-vingt-douze n'oblige à traiter de la numération en base vingt.

[…]

D'une façon générale, si tous les calculs finis, exacts, les seuls qu'admettaient les Anciens, ont conservé toute leur importance mathématique, s'ils doivent être connus et étudiés par les Mathématiciens actuels, leur importance pratique a considérablement diminué, et est parfois disparue totalement. Partout ces calculs, dits exacts, ont été détrônés par les calculs approchés et souvent les calculs exacts ne sont considérés que parce qu'ils conduisent au mode le plus simple de calcul approché. […] »

Justification des techniques de résolution d'un problème de proportionnalité et considérations sur les grandeurs

La résolution de problèmes dans des situations de proportionnalité peut convoquer l'emploi de quotients comme opérateurs de deux manières qui sont sensiblement différentes du point de vue conceptuel :

– le quotient utilisé comme opérateur scalaire :

$\times \frac{b}{a}$

Mesure de la grandeur 1 (unité : …)	a	b
Mesure correspondante de la grandeur 2 (unité : …)	a'	?

$\times \frac{b}{a}$

L'opérateur $\frac{b}{a}$ utilisé ici est un scalaire. Par exemple, si la grandeur 1 est une masse exprimée en kg, et la grandeur correspondante un prix exprimé en euros, on a : b kg = $\frac{b}{a} \times a$ kg et b' € = $\frac{b}{a} \times a'$ €, égalités qui concernent pour chacune d'elles une seule grandeur. En multipliant une masse par un nombre, on obtient une masse ; en multipliant un prix par un nombre, on obtient un prix. Les élèves sont habitués à manipuler ces opérations sur les grandeurs lorsque l'opérateur est un nombre entier (opération externe). Les professeurs des premières classes du collège veilleront à donner une meilleure visibilité à ces techniques scalaires de résolution qui, du point de vue des grandeurs, reposent sur l'isomorphisme des mesures, et dont les élèves comprennent bien la justification, en liaison avec l'emploi de la locution "fois plus".

– le quotient utilisé comme coefficient de proportionnalité :

Mesure de la grandeur 1 (unité : u)	a	b
Mesure correspondante de la grandeur 2 (unité : v)	a'	?

$\times \frac{a'}{a}$

Si l'on reste dans l'univers des grandeurs, au lieu de tout aplatir sur le domaine numérique des mesures, on s'aperçoit que le quotient $\frac{a'}{a}$ n'est en général pas un scalaire. C'est la mesure avec l'unité $\frac{v}{u}$ d'une troisième grandeur : la grandeur - quotient de la grandeur 2 par la grandeur 1. Cette grandeur - quotient, en général, a une dimension et n'est pas un "nombre pur". Dans une situation de proportionnalité, cette grandeur - quotient est une grandeur constante.

Ce qui précède montre que, dans les problèmes mettant en jeu la proportionnalité, l'emploi du coefficient de proportionnalité est conceptuellement plus difficile que l'emploi des techniques scalaires. Les élèves l'ont cependant utilisé à l'école primaire, et son emploi en classe de 6^e est donc légitime. Il convient cependant d'éviter le cas de grandeurs proportionnelles dont les dimensions sont telles que la grandeur - quotient soit d'un type inconnu (vitesse, masse volumique, …). C'est la raison pour laquelle le programme insiste sur le cas où les deux grandeurs proportionnelles sont de même espèce : deux prix dans le cas d'une hausse de prix de 5% ; et plus généralement toutes les situations évoquant une hausse ou baisse d'une grandeur en terme de pourcentage (deux populations dans le cas d'une baisse de population entre deux recensements …) ; échelles, … Il importe que le coefficient en question soit un "scalaire".

On ne s'interdira pas cependant d'exploiter les situations familières déjà travaillées à l'école : proportionnalité entre quantité de denrées et leur prix, même si le coefficient de proportionnalité est une grandeur - quotient : l'unité avec laquelle ce coefficient est mesuré (€/kg, €/L, …) est celui dont la loi oblige l'affichage, même si sa dénomination usuelle en masque l'aspect "quotient" : prix au litre, au kilogramme, … au lieu de prix par litre, par kilogramme.

En fait, pour traduire la réalité quotidienne d'un consommateur, on est conduit à écrire des égalités entre grandeurs telles que :

$$\begin{aligned} 0{,}975\,\text{kg} \times 112{,}90\ \text{¤/kg} &= 110{,}08\ \text{¤} \\ 2\,\text{u} \times 24{,}50\ \text{¤/u} &= 49{,}00\ \text{¤} \\ 3\ \text{lots} \times 26{,}45\ \text{¤/lot} &= 79{,}35\ \text{¤} \end{aligned}$$

les prix des articles affichés en rayon n'étant jamais des prix, mais des prix par unités commercialisées. Les situations concrètes ne sont pas toujours les plus simples … On peut se demander si on simplifie le travail de compréhension de l'élève de 6^e en numérisant tout, en écrivant (et en lui faisant écrire) à la place de ce qui précède :

$$\begin{aligned} 0{,}975 \times 112{,}90 &= 110{,}08 \\ 2 \times 24{,}50 &= 49{,}00 \\ 3 \times 26{,}45 &= 79{,}35 \end{aligned}$$

QUOTIENTS
PROPORTIONNALITÉ
GRANDEURS

EN 5^e

Calcul fractionnaire (justifications)

À propos de la résolution d'équation du type $\frac{a}{x} = b$

À propos de la proportionnalité en 5^e

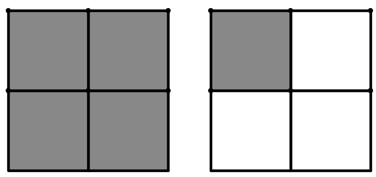
À propos des fréquences

Calcul fractionnaire (justifications)

En classe de 6^e, l'enseignement a pendant longtemps davantage mis l'accent sur l'aspect “fraction” (douze septièmes) que sur l'aspect “quotient” (le septième de douze). On assiste à un rééquilibrage dans les manuels issus des derniers programmes.

En revanche, dans la plupart des manuels de 5^e, l'aspect “fraction” reprend le dessus lorsqu'il s'agit de traiter de l'addition et de la multiplication de “nombres écrits sous forme fractionnaire”. Cette voie est bien sûr possible :

- pour l'addition, on évoque ainsi des parts de tarte, des aires de secteurs circulaires, de carrés ou rectangles munis d'un quadrillage (aires en tant que grandeur unidimensionnelle) ; mais le risque de confusion est parfois grand en ce qui concerne l'unité de référence, notamment lorsque cette dernière n'est pas un disque :



$\frac{5}{4}$?

$\frac{5}{8}$?

- pour la multiplication, on évoque souvent des aires (mais cette fois-ci en tant que produit de longueurs ; grandeur bi-dimensionnelle),

ce qui suppose de la part des élèves des connaissances bien assises sur les aires.

On peut aussi repartir des connaissances installées à propos des opérations sur les fractions décimales (en lien avec les opérations sur les nombres décimaux), dans une perspective de généralisation de résultats connus.

Une autre possibilité consiste à exploiter la définition d'un quotient installée en 6^e :

Je m'intéresse à la somme de $\frac{3}{7}$ et de $\frac{12}{7}$. Pour faire fonctionner la définition de 6^e, je les note respectivement Q et Q' : $\frac{3}{7} = Q$ et $\frac{12}{7} = Q'$, et je m'intéresse à $Q + Q'$. Alors cette définition me dit que $7\ Q = 3$ et $7\ Q' = 12$. J'en déduis immédiatement : $7Q + 7Q' = 15$. L'occasion est belle d'utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, qui me permet de faire apparaître le “$Q + Q'$” que je cherche.

$$7\,(Q + Q') = 15$$

La définition d'un quotient vue en 6^e me permet de lire cette égalité d'une manière intéressante : $Q + Q'$ est le nombre qui, multiplié par 7, donne 15. C'est donc le quotient de 15 par 7, qui s'écrit $\frac{15}{7}$. Et finalement, on vient de démontrer que : $\frac{3}{7} + \frac{12}{7} = \frac{15}{7}$.

Cette démonstration nécessite une intervention forte du professeur, notamment pour l'introduction des lettres Q et Q'. Elle ne peut donc être laissée à la charge des élèves seuls. Mais cette démonstration se généralise au cas des quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$, ce qui permet de faire une vraie démonstration, plutôt que d'en rester aux pratiques inductives. Elle fait évidemment appel au signe “égal” de l'algèbre, qui est une conquête de la classe de 5^e : pour de nombreux élèves, en effet, le signe “égal” n'est utilisé que pour indiquer le résultat de l'opération qui figure au premier membre. L'initiation à la notion de solution d'équation tient en classe de 5^e un rôle très important pour donner au signe “égal” un statut nouveau, que l'on doit à Leibniz : ce signe signifie que les deux écritures qu'il sépare désignent un même objet mathématique, ici un même nombre. L'idée forte à mettre en œuvre repose sur la substitution : dans les calculs , on peut remplacer un nombre par un nombre qui lui est égal. Ainsi, par exemple, sachant que $\frac{a}{b} = Q$ et $\frac{c}{b} = Q'$, on veut démontrer que

$Q + Q' = \frac{a+c}{b}$. Par définition d'un quotient, ces trois égalités signifient respectivement : $a = b\,Q$, $c = b\,Q'$ et $a + c = b\,(Q + Q')$. Il s'agit donc de démontrer que la troisième égalité est vraie sachant que les deux premières le sont. Partons de $a + c$, et remplaçons a et c par des nombres qui leurs sont respectivement égaux. On obtient : $a + c = b\,Q + b\,Q'$. La fameuse distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (que l'on admet au niveau du collège) permet d'accomplir la dernière étape. Ainsi, le professeur peut pratiquer devant les élèves des démonstrations dans un domaine autre que la géométrie. Une telle démonstration peut sembler difficile en classe de 5^{e} (nous venons de voir qu'elle repose sur une acception nouvelle du signe “égal” et sur une pratique algébrique qui lui est directement associée, la substitution, et qui est elle aussi nouvelle). Mais un élève ne peut découvrir tout seul de telles pratiques de démonstration. Si cette découverte n'est pas assurée par le professeur en classe de 5^{e}, les occasions ne manquent pas dans les classes suivantes, lors des reprises de l'enseignement de ces mêmes propriétés : au début de la 4^{e} et parfois encore en classe de 3^{e}. La démonstration algébrique permet alors de montrer aux élèves la puissance de l'algèbre pour expliquer, pour justifier des propriétés (qui ont souvent été établies sans véritable démonstration).

Cette démonstration fournit de plus une technique pour calculer des sommes de quotients avec une calculatrice bas de gamme (ne possédant pas de fonctions spéciales pour le calcul fractionnaire) : on tape 3÷7 + 12÷7 (on obtient une valeur approchée de $\frac{3}{7} + \frac{12}{7}$) ; on la multiplie par 7 : on trouve 15. En utilisant la définition d'un quotient, on en déduit que le résultat est $\frac{15}{7}$: on peut demander aux élèves de justifier cette dernière déduction, qui repose sur la définition d'un quotient. Voici une occasion pour le professeur de piloter l'emploi par les élèves de la calculatrice, qui ne manque pas de pertinence mathématique !

Le même type de travail peut être fait sur les autres points du programme : invariance du quotient de deux nombres lorsqu'on les multiplie par un même nombre (non nul), soustraction lorsque les dénominateurs sont les mêmes, addition et soustraction dans le cas où l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre, multiplication, puis plus tard comparaison.

À propos de la résolution d'équation du type $\frac{a}{x} = b$

La compétence exigible figurant au programme est la suivante :
Trouver, dans des situations numériques simples, le nombre par lequel diviser un nombre donné pour obtenir un résultat donné.
Les commentaires précisent que désigner par une lettre le nombre inconnu peut ici se révéler pertinent.

Exemple : par quel nombre faut-il diviser 12 pour trouver 7 ?
L'idée est ici de se ramener à un problème d'un type déjà connu. Le nombre cherché est en effet tel qu'en le multipliant par 7, on trouve 12.
En sortant de 6^{e}, l'élève sait que le résultat de la division de b par a, est le nombre qui, multiplié par a, donne b. Si en divisant 12 par *un nombre*, on trouve 7, c'est donc qu'en multipliant *ce nombre* par 7, on trouve 12, et donc que *ce nombre* est égal à $\frac{12}{7}$.

Si l'on désigne l'inconnue par une lettre x, il s'agit alors de résoudre l'équation $12 \div x = 7$.
Pour cela, il convient d'activer chez l'élève la relation entre division et multiplication, d'une manière plus complète qu'on l'a fait en 6^{e} : dans cette classe, on utilise le fait que pour trouver un facteur manquant dans un produit dont on connaît le résultat, on divise ce résultat par le facteur connu. En 5^{e}, on ne s'intéresse pas seulement aux opérations (procédures), mais à des égalités reliant les opérations et leurs résultats. Ici, par exemple, on ne se contente pas de dire qu'en divisant 12 par x on obtient le nombre qui, multiplié par x, donne 12. On active l'équivalence :

Dire “ $12 \div x = 7$ ”, c'est la même chose que de dire “$7 \times x = 12$ ”

ce qui est beaucoup plus difficile pour un élève, et nécessite d'avoir déjà eu l'occasion de nouer un rapport nouveau avec la notion d'égalité.

Il y a ici une rupture, que la mise en parallèle sous forme symbolique suivante (utilisée par certains manuels et professeurs) ne suffit pas à faire exister aux yeux des élèves :

$$\begin{array}{r|l} 12 & x \\ \cline{2-2} & 7 \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ x \\ \hline 7 \end{array}$$

car l'aspect “procédure” l'emporte à leurs yeux, et ne les poussent pas à identifier sous ces écritures symboliques les égalités “ $12 \div x = 7$ ” et “$7 \times x = 12$ ”, objets algébriques nouveaux pour eux.

Ce travail autour de l'équation du type $\frac{a}{x} = b$ fait suite au travail entrepris en 6^{e}, et repris en classe de 5^{e} en employant une lettre autour de l'équation du type $a \times x = b$. Il prépare le travail qui sera fait dans les classes suivantes autour de l'équivalence entre les trois égalités suivantes :

$$c = \frac{a}{b}\ ;\ a = bc\ ;\ b = \frac{a}{c}$$

qui est au cœur de l'usage des formules de trigonométrie dans le triangle rectangle.

À propos de la proportionnalité en 5^{e}

Les deux premières compétences exigibles sont :
- reconnaître, s'il y a lieu, la proportionnalité sur un tableau complet de nombres (1) ;
- compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité dont les données sont fournies partiellement. En particulier, déterminer une quatrième proportionnelle (2).

Pour (1) :

Mesure de la grandeur 1, avec l'unité u	a	b	c	d	e
Mesure de la grandeur 2 correspondante avec l'unité v	a'	b'	c'	d'	e'

On veillera à ne pas donner comme seule méthode celle reposant sur le calcul puis la comparaison des quotients $\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c}, \frac{d'}{d}$ et $\frac{e'}{e}$. Dans certains cas, le calcul particulièrement simple d'un quotient, par exemple $\frac{e}{b}$, permet de conclure, en montrant que $e' \neq b' \times \frac{e}{b}$, que le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Pour (2)
On veillera également à varier les techniques utilisées. Pour les décrire ici, on emploiera le modèle mathématique de la proportionnalité figurant au programme de 3^{e}, c'est-à-dire la fonction linéaire f

qui transforme chaque nombre de la première ligne du tableau en le nombre de la deuxième ligne figurant dans la même colonne :

- technique reposant sur l'additivité de cette fonction :

si, par exemple, $d = a + b$, alors $d' = a' + b'$.

Cette technique est souvent la première qui a été rencontrée à l'école.

- technique reposant sur l'homogénéité de cette fonction (c'est-à-dire la propriété : pour tout couple (k, u), $f(ku) = k\,f(u)$).

Si par exemple, $d = kb$, alors $d' = kb'$.

La notion de quotient agrandit la portée de cette technique, comme on l'a vu pour ce qui concerne la 6^e, puisqu'un tel k est toujours calculable lorsque b et d sont des nombres entiers ou décimaux. Nombreux sont les élèves qui maîtrisent cette technique, car le sens qui lui est attaché est facile à suivre (on fait subir aux mesures de chacune des grandeurs les mêmes traitements : isomorphisme de mesures).

- technique du retour à l'unité : connaissant par exemple $f(a)$, on en déduit $f(1)$ en le divisant par a ; pour obtenir $f(c)$, il suffit de multiplier le résultat obtenu par c.
- technique du coefficient de proportionnalité, dont la portée est également agrandie par le recours aux quotients.
- En revanche, on limitera le recours à la technique dite “des produits en croix”, car elle est difficile à justifier à ce niveau, et fait intervenir un niveau d'abstraction plus élevé. De plus, son succès apparent auprès des élèves n'assure malheureusement pas une autonomie suffisante de ces derniers pour engager d'eux-mêmes l'emploi de cette technique en l'absence d'indices fournis par l'énoncé ou par le professeur. Ainsi, cette technique marche bien, à condition que le professeur fasse ce qu'il faut pour cela. Mais lorsque le professeur n'est plus là, les choses changent …

En ce qui concerne la reconnaissance d'un mouvement uniforme par la proportionnalité entre temps (ou plutôt durée) de parcours et distance parcourue, on veillera à ne pas empiéter sur le programme de 4^e par une formalisation prématurée de la notion de vitesse. On signalera que le coefficient de proportionnalité (avec des unités convenablement précisées) s'appelle la vitesse du mouvement uniforme : on se contente ici de reconnaître si un tableau fournissant les valeurs de d et de t est un tableau de proportionnalité. Si oui, on peut le compléter, y compris en utilisant le coefficient de proportionnalité v, mais sans évoquer la grandeur quotient v et sans institutionnaliser la formule $d = v\,t$.

En ce qui concerne les échelles, les pratiques utilisant des plans (plan d'une ville, d'un quartier, …) tendent vers une dé-mathématisation apparente des échelles : au lieu de les exprimer avec une fraction en n^e (qui est un “scalaire”, mot de même origine que “échelle”), on les exprime avec des locutions du type “1 cm pour 20 m”, qui sont également des scalaires, malgré la présence d'unités :

$$\frac{1\text{ cm}}{20\text{ m}} = \frac{1\text{ cm}}{2000\text{ cm}} = \frac{1}{2000}.$$

En effet, le quotient de deux longueurs est un “nombre pur”. En fait, les mathématiques sous-jacentes sont celles des longueurs, et non plus celles de leurs mesures, auxquelles l'enseignement récent tend à les réduire, ce qui n'est pas sans conséquence sur la compréhension des élèves.

À propos des fréquences

On est ici encore dans le domaine des grandeurs, et une fréquence est un quotient de deux grandeurs de même espèce (ici deux populations), donc un nombre sans dimension. S'y ajoute le fait que les grandeurs que l'on considère sont liées par des relations du type “partie/tout”, ce qui explique que les quotients en question sont compris entre 0 et 1.

Le mot “rapport” est souvent utilisé à la place de quotient lorsqu'il s'agit de grandeurs. Leur réduction aux nombres qui les mesurent est à l'origine de l'emploi du mot “quotient”.

Dans le langage courant, au lieu du mot “fréquence”, on emploie souvent le mot “proportion”, que l'on réservait en mathématiques, il y a quelques années, pour signifier l'égalité de deux rapports.

Remarque :
Dans de nombreux pays, on utilise les statistiques et probabilités pour enseigner la notion de quotient. Ainsi, si dans une classe de 25 élèves, il y a 14 filles et 11 garçons, et qu'une nouvelle fille s'y inscrit, la proportion de filles dans la classe augmente : ce qui prouve que $\frac{14}{25} < \frac{15}{26}$. De tels raisonnements sont classiquement enseignés en Angleterre comme technique de comparaison des “fractions”.

QUOTIENTS
PROPORTIONNALITÉ
GRANDEURS

EN 4^e

Calcul fractionnaire

Lien avec la géométrie

Première approche de l'énoncé de Thalès

Cosinus et quotients

Quotients et puissances à exposants relatifs

Calcul fractionnaire

Le calcul “fractionnaire” fait l'objet d'une reprise de l'étude, souvent faite sous forme de “révisions”, dont on connaît l'inefficacité si elles sont faites sans apporter du nouveau. Un bon moyen pour faire du nouveau est de donner une démonstration des formules reposant sur la définition d'un quotient, comme on l'a vu précédemment (classe de 5^{e}).
Illustrons-le pour la formule relative au produit de deux quotients.
On peut commencer par des exemples numériques. Justifions que $\frac{12}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{35}$.

Appelons Q le nombre $\frac{12}{7}$, et Q' le nombre $\frac{2}{5}$. La définition d'un quotient (vue en 6^{e}) nous assure que : $7\ Q = 12$ et $5\ Q' = 2$. On en déduit que $(7Q)\times(5Q') = 12\times\ 2$, c'est-à-dire $35\ QQ' = 24$. La même définition d'un quotient permet de conclure que $QQ' = \frac{24}{35}$.

Mais de telles démonstrations dans des cas particuliers ne permettent pas de souligner l'intérêt de *l'algèbre comme mémoire* des calculs. Le même raisonnement fait avec (a, b) à la place de (12, 7) et (c, d) à la place de (2, 5) conduit à la formule $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, qui montre comment les nombres 24 et 35 ont été obtenus. Le passage à la formule $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$ n'est pas anodin, car $a \times c$ évoque clairement une opération, alors que ac évoque les deux aspects “opération” et “résultat” de l'opération, ce qui est une caractéristique forte des expressions algébriques qu'il convient de signaler aux élèves, car elle n'est évidente qu'aux yeux d'un algébriste (ce que l'élève n'est pas encore).

Le point nouveau figurant au programme de 4^{e}, concerne la division de deux quotients. Q et Q' désignant respectivement les quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, il s'agit de déterminer le quotient de Q par Q' : c'est, par définition le nombre Q'' tel que $Q'Q'' = Q$. Cherchons-en une écriture fractionnaire $\frac{e}{f}$. Elle doit satisfaire $\frac{c\ e}{d\ f} = \frac{a}{b}$. On tombe sur une égalité de quotients, qu'on ne sait pas encore caractériser, la règle des produits en croix n'ayant pas jusqu'alors été démontrée. Un détour s'impose alors, prévu par le programme : introduire la notion d'inverse, établir que “diviser, c'est multiplier par l'inverse”, puis établir que l'inverse de $\frac{c}{d}$ est $\frac{d}{c}$. C'est la solution la plus fréquemment choisie dans les manuels.

Si la règle des “produits en croix” a été admise (ou démontrée), on peut éviter ce recours à l'inverse : $\frac{c\,e}{d\ f} = \frac{a}{b}$ équivaut alors à $b\,c\,e = a\,d\,f$. La même règle (utilisée “dans l'autre sens”) permet de justifier que $\frac{e}{f} = \frac{ad}{bc}$. On établit ainsi que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Mais on n'obtient pas une règle d'action facile à énoncer et à mémoriser. Pour cela, on est conduit à remarquer que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ est le même nombre que $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$, ce qui conduit à remarquer que, pour les nombres s'écrivant sous forme fractionnaire, diviser par un nombre, c'est multiplier par un *autre nombre*. Ce qui justifie l'intérêt pour les deux questions suivantes (qui, dans le scénario précédent, ne sont pas motivées) :

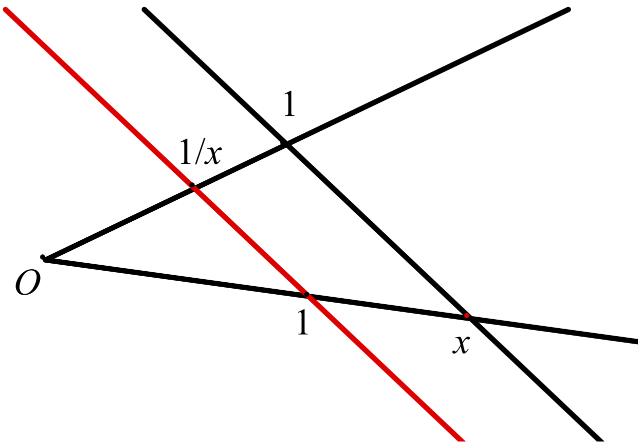
- cette propriété est-elle vraie pour tous les nombres (indépendamment de leur écriture) ?
- comment nommer cet *autre nombre* ? quelle définition en donner qui soit indépendante de l'écriture du nombre ? comment le noter de manière générale ?

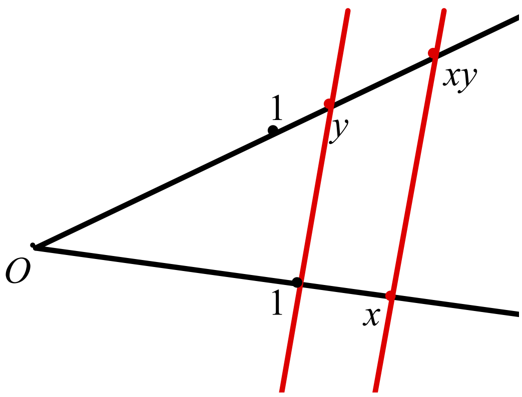
Après avoir donné la réponse au 2[e] groupe de questions, la réponse à la première question va conduire au résultat $a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Le programme n'évoque que la dernière égalité, faisant l'hypothèse qu'il est clair pour tout le monde que $\frac{a}{b}$ présente un double aspect : l'aspect procédural (faire la division de a par b), et l'aspect structural (écriture du résultat exact de cette division). Or on sait que ce double aspect gêne considérablement les élèves “non-algébristes” ; ils continuent à faire comme on faisait à l'école et au début du collège, et portent leur attention sur les opérations à faire, le signe “égal” indiquant qu'il faut faire l'opération et trouver le résultat. L'algébriste, à partir de la même écriture, l'interprète tout autrement : il fait certes attention aux opérations, mais également à leur résultat ; un signe “égal” indique parfois le résultat d'une opération, mais beaucoup plus fréquemment le fait que les deux écritures qu'il sépare désignent un seul et même objet (ici, un nombre). Le professeur doit non seulement être conscient de ces différences, mais les souligner, en parler, afin que les élèves sachent parmi les connaissances antérieurement acquises, celles qu'ils doivent garder, mais surtout celles qui sont nouvelles, et se surajoutent aux anciennes …

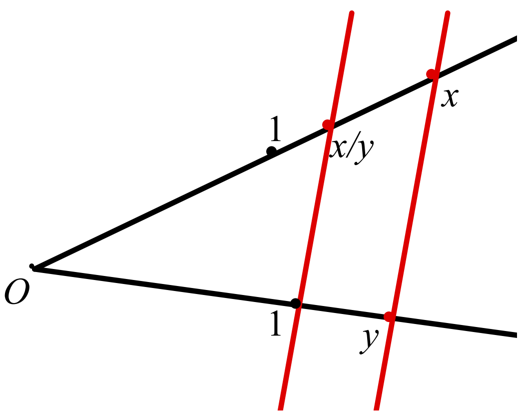
- quant à la réponse à la première question (définition et notation de l'inverse), contrairement aux programmes de l'époque dite “des mathématiques modernes” où l'on définissait le quotient à partir de l'inverse, on définit maintenant l'inverse d'un nombre x comme quotient de 1 par ce nombre, ce qui règle la question de sa notation sous la forme $\frac{1}{x}$.

Lien avec la géométrie

La configuration de Thalès au programme de 4[e] permet de donner de l'inverse (ainsi que du produit et du quotient) une représentation géométrique, à condition de choisir un triangle adapté :







L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de visualiser les variations de $\frac{1}{x}$ en fonction de x ($x > 0$), et de montrer le rôle de la place de x par rapport à 1. Signalons, à titre d'information, que l'utilisation de l'énoncé de Thalès pour construire des nombres (produit, quotient) à la règle et au compas figure au programme de géométrie de l'option “mathématiques” de la classe de première L.

Première approche de l'énoncé de Thalès

Rappelons que cet énoncé figure au programme afin de fournir des démonstrations sans cercle vicieux de l'existence du cosinus d'un angle aigu (indépendance par rapport au triangle rectangle dans lequel on enferme cet angle).

La formulation proposée par le programme privilégie l'égalité des trois “rapports de longueur” (ou des trois quotients de leurs mesures, quotient qui est indépendant de l'unité de longueur choisie) :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

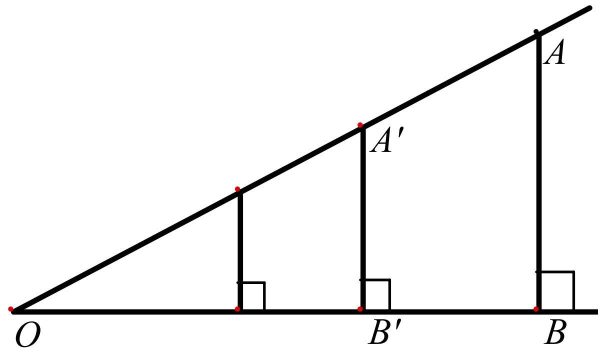
Si l'on veut garder le bénéfice de tout le travail antérieur fait sur la proportionnalité, on pourra dans un premier temps, traduire cette proportionnalité à l'aide d'un tableau tel que le suivant :

Mesure des côtés du triangle *ABC*	AB	AC	BC
Mesure du côté correspondant du triangle *AMN*	AM	AN	MN

tableau qui suffit souvent à traiter des recherches de 4^{e} proportionnelle avec les outils antérieurs, sans mobiliser les égalités de quotients (ou proportions), qui constituent des outils très algébrisés.
Par exemple, il est clair que si *BC* est le triple de *AB*, alors *MN* est le triple de *AM*, … La démonstration est bien plus simple que celle qui mobilise l'égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, égalité qu'il a fallu extraire de la double égalité précédente. En effet, elle conduit souvent à utiliser le “produit en croix” (résultat théorique en général non justifié), pour se ramener à une équation du premier degré en *MN* (que l'on appelle souvent *x* dans ce but, ce qui constitue une autre complication). Une autre technique est possible. L'égalité précédente fournit la valeur du quotient $\frac{MN}{BC}$; par définition de ce quotient, on obtient *MN* en le multipliant par *BC*.

Cosinus et quotients

• La version “tableau de proportionnalité” de l'énoncé de Thalès appliqué à la figure suivante, utilisée pour l'introduction du cosinus d'un angle aigu permet d'éviter une manipulation des égalités de quotients, bien délicate à ce stade.



En effet, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Mesure des côtés de l'angle O dans OAB	*OA*	*OB*
Mesure des côtés correspondants de l'angle O dans OA'B'	*OA'*	*OB'*

Donc le nombre k par lequel il faut multiplier OA pour trouver OB est le même que celui par lequel il faut multiplier OA' pour trouver OB' (allusion à la procédure utilisant l'homogénéité de l'application linéaire sous-jacente). La définition d'un quotient montre que ce nombre k est donc égal à la fois à $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{OB'}{OA'}$. Ce qui prouve l'égalité de ces quotients, sans avoir à passer par les étapes : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, puis $OA \times OB' = OA' \times OB$, pour obtenir enfin $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$.

• Nous avons déjà signalé précédemment l'importance de l'équivalence des trois égalités suivantes :

$$c = \frac{a}{b} \; ; a = bc \; ; b = \frac{a}{c}$$

Tous les exercices tournant autour de la définition du cosinus sont des variations autour de ces trois équivalences, dont la définition d'un quotient constitue le cœur. Viennent ici s'ajouter les difficultés liées à la dualité “calcul exact / calcul approché”. Il convient de savoir transformer “dans le littéral” la formule $\cos \hat{O} = \frac{OA}{OB}$ en l'une des deux formules $OA = OB \times \cos\hat{O}$ ou $OB = \frac{OA}{\cos \hat{O}}$, avant de remplacer certains nombres par leurs valeurs : un bon emploi de la calculatrice permet de ne pas remplacer le cosinus par une valeur grossièrement arrondie …

Proportionnalité et quotients

Le programme met l'accent sur l'égalité $d = vt$, qui est de la même forme que l'égalité $a = bc$ évoquée au paragraphe précédent. Les mêmes remarques s'imposent : la seule définition d'un quotient permet de légitimer le passage de $d = vt$ à $v = \frac{d}{t}$ ou $t = \frac{d}{v}$. Il est de l'intérêt des élèves de leur apprendre à faire ces transformations “dans le littéral” avant d'en venir aux “applications numériques”, afin que les élèves apprennent du nouveau en passant d'une classe à la suivante.

Il évoque également les grandeurs, et en particulier les grandeurs quotients, et en particulier les changements d'unités. Un article récent de la revue *Petit x* (n° 55, pp. 5-32), intitulé “Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée”, écrit par Y. Chevallard et M. Bosch montre tout l'intérêt que peut avoir le calcul avec unités, qui est utilisé dans de nombreux pays. Illustrons cette pratique pour exprimer la vitesse de 60 km/h en m/s.

$$60 \text{ km/h} = \frac{60 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{60\ 000 \text{ m}}{3\ 600 \text{ s}} = \frac{60000}{3600} \text{ m/s} = \frac{100}{6} \text{ m/s} \approx 16{,}67 \text{ m/s}.$$

Remarque :
En Physique, la formule $d = vt$ concerne des grandeurs, et ne suppose pas l'emploi d'unités imposées comme le mètre et la seconde, même si ces dernières font l'objet d'une normalisation. Elle suppose seulement un emploi cohérent des unités : ainsi, si d est exprimée en cm et t en h, elle permet d'obtenir v en cm/h, ce qui a une signification. En mathématiques, d, v et t ne sont souvent que des mesures de chacune des grandeurs.

Quotients et puissances à exposants relatifs

À propos des puissances, il convient d'abord de bien installer les résultats pour les puissances à exposants entiers (> 2).
L'idée essentielle à mettre en valeur est le principe de permanence : on voudrait étendre la définition de a^n (a non nul) aux cas $n = 0$, $n = 1$, n entier négatif, de manière telle que les formules déjà établies demeurent valables.
Ainsi, à partir de $a^n \times a^p = a^{n+p}$, on obtient :

- pour $p = 0$, $a^n \times a^0 = a^n$; la définition d'un quotient montre alors qu'il faut poser $a^0 = 1$.
- pour $p = 1$, $a^n \times a^1 = a^{n+1}$; la définition d'un quotient montre alors qu'il faut poser $a^1 = a$.
- pour $n = 1$ et $p = -1$, $a^1 \times a^{-1} = a^0$, donc $a \times a^{-1} = 1$; la définition de l'inverse si on l'a vue (d'un quotient sinon) montre qu'il faut définir a^{-1} comme le quotient de 1 par a, c'est-à-dire l'inverse de a. Ce qui justifie cette nouvelle notation pour l'inverse de a.
- pour $p = -n$ ($n > 0$), on est conduit ainsi à poser que a^{-n} est l'inverse de a^n.

Ainsi les conventions ou notations usuelles trouvent une justification, et peuvent perdre le caractère arbitraire qu'elles ont souvent aux yeux de certains élèves. Il reste bien sûr à démontrer qu'en les adoptant les anciennes formules sur les puissances sont encore vraies, résultat que l'on peut admettre en 4e (en signalant qu'on le fait).

Cette justification de la notation de l'inverse permet en outre de donner du sens à la notation des unités de vitesse : km/h, c'est le quotient $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, qui est égal à km $\times \frac{1}{\text{h}}$. Or $\frac{1}{\text{h}}$ se note également h^{-1}, d'où la notation : km. h^{-1}. Plus généralement, le calcul avec les unités, évoqué plus haut, montre l'intérêt de connaître les formules sur les puissances dans le registre du calcul littéral : les unités sont écrites avec des lettres !

QUOTIENTS
PROPORTIONNALITÉ
GRANDEURS

EN 3^e

Quotients et trigonométrie

Quotients et énoncé de Thalès

Quotients et fonctions linéaires

Quotients - Nombres rationnels et irrationnels

Quotients et trigonométrie

Là encore, l'équivalence des trois égalités suivantes :

$$c = \frac{a}{b} \; ; a = bc \; ; b = \frac{a}{c}$$

est au cœur des exercices concernant l'utilisation de la définition du sinus, et de la tangente d'un angle. (Cf. paragraphe correspondant pour la classe de 4^e^).

Quotients et énoncé de Thalès

• On a vu précédemment que l'on peut limiter l'emploi de la règle “du produit en croix” jusqu'en 4^e^ (classe dans laquelle on peut encore s'en passer). On a dit précédemment qu'elle était abstraite. Pour illustrer ce caractère, considérons la banale situation de proportionnalité entre quantité d'une denrée (en kg) et son prix (en €). Les produits en croix que l'on écrit alors, si l'on se place dans le cadre des grandeurs, le moins abstrait, sont du type :

$$a \text{ kg} \times x \text{ €} = b \text{ kg} \times a' \text{ €},$$

d'où l'on tire x € en divisant par a kg. Dans l'étape intermédiaire, on multiplie des kg par des €, faisant ainsi implicitement allusion à une grandeur produit qui n'existe pas dans la vie courante, et qui aurait pour unité le “kg × €”, qui n'existe pas davantage.

• Cette règle permettant de caractériser des quotients égaux va devenir indispensable en 3^e^. On peut en effet faire alors remarquer que l'égalité bien connue $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ ne caractérise les “fractions” égales à $\frac{a}{b}$ que lorsque cette dernière est irréductible. Sinon, une fraction égale à $\frac{a}{b}$ n'est pas nécessairement de la forme $\frac{ka}{kb}$, comme le montrent les exemples très simples : $\frac{6}{8}$ et $\frac{9}{12}$. Se pose alors la question de caractériser des quotients égaux. La démonstration du résultat peut se faire en utilisant la définition d'un quotient (on peut donc la faire avant la classe de 3^e^ si on le souhaite).
Supposons que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Alors en multipliant les deux membres par b, on obtient deux nombres qui sont encore égaux : $b \times \frac{a}{b} = b \times \frac{c}{d}$. La définition d'un quotient montre que le premier membre est égal à a ; quant au second, on sait depuis la 6^e^ qu'il est égal à $\frac{bc}{d}$. Donc $a = \frac{bc}{d}$. En multipliant les deux membres par d, on obtient encore des nombres égaux : $ad = \frac{bc}{d}\,d$. Et la définition d'un quotient montre que le second membre est égal à bc. Donc $ad = bc$.
Réciproquement, supposons $ad = bc$. En divisant les deux membres par bd, on obtient deux nombres qui sont égaux : $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$. En appliquant deux fois la règle de simplification des quotients (connue dès la 6^e^), on obtient : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
• On peut alors utiliser les “produits en croix” dans les nombreux exercices où l'application de l'énoncé de Thalès (tel qu'il est formulé dans le programme) conduit à des équations du premier degré à une inconnue (ou qui s'y ramènent, après simplification des termes en x^2).

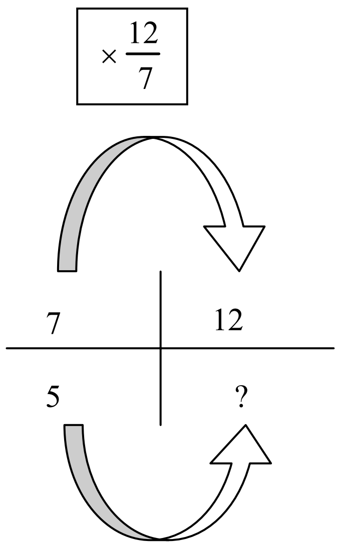
Quotients et fonctions linéaires

L'expérience montre que la fonction linéaire présentée comme modèle des situations de proportionnalité “passe” mal auprès des élèves, qui trouvent qu'elle n'apporte rien (puisqu'ils peuvent continuer à traiter ces situations comme ils le faisaient avant), et que les notations et écritures sont bien compliquées, sans parler des aspects langagiers (avoir pour image …, être l'image de …).

Une manière de montrer l'intérêt de cette notion consiste à utiliser la notation f pour traiter des problèmes de proportionnalité. Supposons par exemple que $f(7) = 5$; on demande de déterminer $f(12)$ (c'est ainsi que se formule un problème de recherche de quatrième proportionnelle).

On sait que $12 = 7 \times \frac{12}{7}$. Donc : $f(12) = f\left(\frac{12}{7} \times 7\right) = \frac{12}{7}\, f(7) = \frac{12}{7} \times 5 = ...$

Cette technique utilise la propriété d'homogénéité d'une fonction linéaire, qui est facile à démontrer à partir de la définition usuelle. Les notations relatives aux fonctions permettent donc d'écrire en une seule ligne un raisonnement qui, dans les classes précédentes, nécessitaient la production d'un tableau tel que le suivant :



On notera que l'on n'utilise pas ici la définition ($f(x) = ax$) d'une fonction linéaire, mais une de ses propriétés (l'homogénéité), à laquelle il convient de donner une place.
D'autres techniques de résolution du problème utilisant la fonction f sont évidemment possibles.

$f(7) = 5$; donc $7\,f(1) = 5$, donc $f(1) = \frac{5}{7}$. Donc $f(x) = \frac{5}{7}\,x$, et en particulier $f(12) = \frac{5}{7} \times 12 = \ldots$

Remarque relative à l'introduction de la notation *f*

Dans les classes précédentes, on utilise l'expression “en fonction de” ou encore “est fonction de” sans introduire aucun formalisme, ce dernier faisant irruption en classe de 3^e^.

Il est possible de procéder autrement, tout en restant dans le cadre défini par le programme, à condition toutefois de donner une visibilité suffisamment grande à la technique de résolution des problèmes de proportionnalité reposant sur l'homogénéité de la fonction linéaire.

Dans les petites classes, on peut utiliser des abréviations du type “p de 15 kg de …” pour désigner le prix de 15 kg d'une certaine denrée. L'homogénéité de la fonction linéaire peut alors se traduire par des écrits comme ceux figurant ci-dessous, qui sont simplement des transcriptions des explications orales habituelles :

$$15 \text{ kg} = 5 \times 3 \text{ kg}$$
$$\text{donc p. de } 15 \text{ kg} = 5 \times \text{p. de } 3 \text{ kg}.$$

En classe de 3^e, il convient de trouver des notations abrégées qui soient indépendantes du contexte. L'emploi fréquent des expressions “en fonction de” ou “est fonction de” dans les classes antérieures justifie le choix de la lettre f pour généraliser le rôle tenu par p. dans l'exemple précédent. Quant à la locution “de”, elle est remplacée par une parenthèse (ce qui aurait conduit à l'écriture p(15 kg) dans l'exemple précédent). Par ailleurs, le rabattement des grandeurs sur les mesures permet de remplacer 15 kg par 15 (en choisissant le kg comme unité), ce qui légitime des écritures telles que p(15) et donc telles que $f(15)$ ou $f(x)$ dans un cas plus général.

Remarque sur la force de la propriété d'homogénéité
Une fonction f de **R** dans **R** qui vérifie “pour tout (k, x), $f(kx) = k\,f(x)$” est linéaire.
En effet, si u et v sont deux nombres réels :
$f(u+v) = f[(u+v)\times 1] = (u+v)\, f(1) = uf(1) + vf(1) = f(u) + f(v)$
donc f est additive.
De plus x désignant un nombre réel quelconque, $f(x) = f(x\times 1) = x \times f(1) = x \times a = ax$ si l'on pose $a = f(1)$.
Cette remarque justifie sur le plan mathématique le rôle important donné à l'homogénéité dans le traitement des situations de proportionnalité, par le biais des procédures dites “scalaires” (par opposition aux techniques dites “fonctionnelles” reposant sur l'emploi du coefficient de proportionnalité).
L'introduction progressive de la notation f par l'usage d'abréviations du type “p. de …” ne trouve une efficacité dans les techniques de résolution que si l'homogénéité et les procédures scalaires sont effectivement utilisées. Voici une raison pour ne pas privilégier trop tôt la technique dite des “produits en croix” qui, en plus des défauts signalés précédemment, possède celui d'être une “faucheuse des autres procédures”, selon un bon mot d'Alain Diger, c'est-à-dire une procédure qui rend inutile toutes les autres. Or les procédures scalaires constituent un point d'appui important dans la construction du champ conceptuel de la proportionnalité, point d'appui qui fait cruellement défaut si on installe le “produit en croix” comme seule technique.

Quotients - Nombres rationnels et irrationnels

• Une synthèse sur les nombres est prévue en 3^e, dans laquelle les nombres rationnels sont définis comme quotients d'entiers (avec l'écriture sous forme de fraction irréductible). Si cette dernière écriture est bien installée, il n'en est pas de même de la définition d'un nombre rationnel.

Il importe de faire remarquer que la plupart des nombres rencontrés jusqu'à la 3^e possèdent cette propriété : les nombres entiers (l'écriture d'un nombre entier sous forme fractionnaire n'est pas toujours disponible pour calculer des sommes du type $n + \frac{p}{q}$), mais aussi les nombres décimaux. Au sujet de ces derniers, la définition d'un nombre décimal comme nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ n'est pas suffisamment rencontrée au collège. Une plus grande fréquentation de l'écriture $\frac{14503}{1000}$ de $14{,}503$ est à prévoir pour pouvoir déboucher sur une définition en $\frac{a}{10^n}$ qui “montre” que tout nombre décimal est un nombre rationnel.

• Quant à la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ évoquée dans le programme, elle n'est pas systématiquement traitée. Pourtant, c'est l'existence de tels nombres qui justifie la présence dans le cours de 3^e d'un paragraphe intitulé “Opérations sur les radicaux” : ainsi, démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut avoir une dimension autre que culturelle.

La démonstration classique
On a besoin du fait que si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est pair. On peut le démontrer en sollicitant le dernier chiffre de l'écriture décimale d'un nombre et de son carré. On peut aussi utiliser l'algèbre (pour montrer qu'elle sert à autre chose qu'elle-même, ce qui légitime le fait qu'on l'étudie).
Pour cela, on est conduit à démontrer plutôt la contraposée : Si un nombre est impair, alors son carré est impair.

Prenons un entier n impair. Il s'écrit sous la forme $2k + 1$, où k désigne un nombre entier. Alors, son carré vaut $(2k+1)^2$, c'est-à-dire : $4k^2 + 4k + 1$, expression qu'il convient d'écrire sous la forme $2K + 1$, K désignant un entier naturel. Or $4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, ce qui permet de conclure en appelant K le nombre $2k^2 + 2k$. Cette factorisation originale, orientée par le but à atteindre montre une utilisation intéressante de l'algèbre pour une fin autre qu'elle-même …

Une démonstration très récente
Voir le bulletin vert de l'APMEP n° 435 (p. 439).
On sait que $1 < \sqrt{2} < 2$. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Soit q le plus petit entier naturel (> 1) tel que $q\sqrt{2}$ appartienne à **N**. Considérons alors le nombre entier q' égal à $q\sqrt{2} - q$.
On va montrer que $0 < q' < q$ et que $q'\sqrt{2}$ est aussi un nombre entier naturel, ce qui contredit la définition de q.
• De $1 < \sqrt{2} < 2$, il résulte que $q < q\sqrt{2} < 2q$ (1), puis $0 < q' < q$.
• D'autre part $q'\sqrt{2} = 2q - q\sqrt{2}$, ce qui prouve que $q'\sqrt{2}$ est un entier relatif. De (1), on déduit que $q'\sqrt{2} > 0$, et donc $q'\sqrt{2}$ est un entier naturel.

Quotients et “grandeurs composées”

Voir l'article de *Petit x* cité ci-dessus pour des exemples de changements d'unités, traités à l'aide du calcul avec unités.