Échantillonnage : couleur des yeux au Canada

Contexte pédagogique

Objectifs

- Obtenir un intervalle de fluctuation à partir d'une simulation programmée sur tableur dans un premier temps, puis avec une calculatrice ou un logiciel de programmation. En tirer des conséquences sur un échantillon réel.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Échantillonnage et prise de décision Intervalle de fluctuation d'une fréquence. Prise de décision.	• Calculer le nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente. • Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, d'une fréquence. • Exploiter un tel intervalle pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.	◊ L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un algorithme ou d'un tableur. Le vocabulaire des tests (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.

Prérequis, capacités

- Pour la partie Tableur : fonctions « alea », « si », « nb.si », adressage absolu et adressage relatif, et éventuellement « mise en forme conditionnelle des cellules » pour une présentation esthétique des feuilles de calcul.
- Pour la partie Algorithmique : Notions d'algorithmique du programme de seconde : boucle et itérateur, instruction conditionnelle. Dans la question proposée en approfondissement, il est également requis de savoir travailler sur les « Listes ».

Les intentions

Le professeur procède à une introduction de la séance à l'aide du vidéoprojecteur, en utilisant le fichier (Yeux bleux.xlsx) sur Tableur proposé en annexe.

Pour l’activité 3 :

- Savoir répondre aux questions 1, 2.A. et 3.A. peut être considérée comme d’un niveau moyen.
- Les élèves pourront être aidés dans la recherche proposée à la question 3, d’une fonction f définie sur $[0\ ;\ 1[$ qui prend la valeur 1 sur $[0\ ;\ 0{,}26]$ et la valeur 0 sur $]0{,}26\ ;\ 1[$. Le professeur peut choisir de leur donner directement la fonction, et leur demander de préciser les valeurs prises par cette fonction.
- Les autres questions : 2.B., 3.B., 3.C. et surtout 4, correspondent à un niveau d’approfondissement et pourront faire l’objet d’un enseignement différencié à destination des meilleurs élèves.

Exemples d’activités

Énoncé du problème étudié :

Dans un village canadien, on a observé que parmi 50 enfants, 24 ont les yeux bleus. Peut-on considérer que cet échantillon est aléatoire ?

Statistique Canada Statistics Canada Canada

Statistique Canada
www.statcan.gc.ca

English | Accueil | Contactez-nous | Aide | Recherche | canada.gc.ca

Accueil > Recensement à l'école > Données et résultats > Résultats sommaires du Canada pour 2009-2010 >

Recensement à l'école
Quoi de neuf!
Enseignants
Besoin d'aide?
Élèves
Parents
Enquêtes
Données et résultats
Activités pédagogiques
Ressources éducatives StatCan
Recensement du Canada
Protection des renseignements
Projet international

De quelle couleur sont vos yeux?

Couleur des yeux	Filles	Garçons
	pourcentage	
Bruns	49,4	50,4
Bleus	25,8	25,7
Verts	11,3	12,5
Autre couleur	13,5	11,4

Note : Élèves du primaire seulement.
Source : Statistique Canada, Recensement à l'école, 2009-2010.

Date de modification: 2010-09-07
Haut de la page
Avis importants

Selon une étude récente, la fréquence des yeux bleus au Canada parmi les enfants est d’environ 0,26. (www.statcan.gc.ca)

Activité 1 – Utilisation d'un tableur

1. Sur la feuille 1 d'un fichier générer la couleur « bleu » avec une probabilité de 0,26.

Quelle formule (utilisant les fonctions "si" et "alea") faut-il inscrire dans la cellule B3 pour obtenir le mot « bleu » avec une probabilité de 0,26 ? La touche F9 permet ensuite d'obtenir un nouveau résultat aléatoire.

	A	B	C
1			
2		Couleur des yeux	
3		Bleu	
4			

=SI(ALEA()<=0,26;"Bleu";"Autre")

(*une mise en forme conditionnelle de la cellule permet en plus d'obtenir le coloriage correspondant*)

2. Sur la feuille 2 obtenir un échantillon aléatoire de 50 personnes en visualisant et en totalisant ceux qui ont les yeux bleus.

À l'aide de la formule utilisée à la question précédente copiée et tirée vers le bas jusque dans la cellule B52, on obtient l'échantillon voulu.

Quelle formule (utilisant la fonction "nb.si") faut-il inscrire dans la cellule E2 pour obtenir le total des enfants ayant les yeux bleus dans l'échantillon ?

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Couleur des yeux		Nombre d'enfants aux yeux bleus dans un groupe d'effectif: 50	17	
3		Bleu				
4		Bleu				
5		Autre				
6		Autre				
7		Autre				
8		Bleu				

=NB.SI(B3:B52;"Bleu")

La touche F9 permet ensuite d'obtenir un nouvel échantillon aléatoire.

3. Sur la feuille 3 obtenir 200 échantillons de 50 personnes, en visualisant et en totalisant ceux qui ont les yeux bleus, puis en faire une synthèse numérique et graphique sous forme d'histogramme.

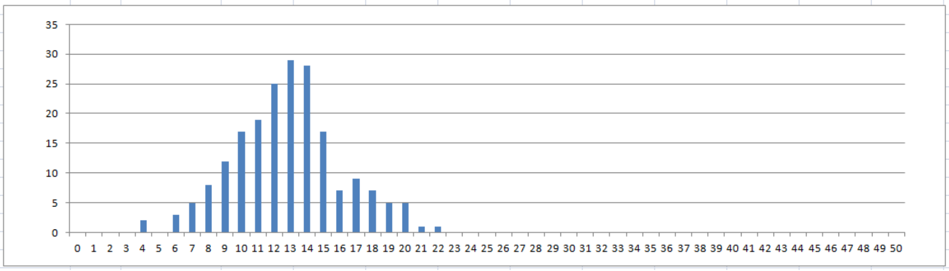
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Couleur des yeux					
3		Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre
4		Autre	Bleu	Autre	Autre	Autre	Autre
5		Autre	Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre
6		Autre	Autre	Bleu	Bleu	Bleu	Autre
7		Bleu	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre
8		Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre	Bleu
9		Autre	Bleu	Bleu	Autre	Autre	Autre
10		Autre	Bleu	Bleu	Bleu	Bleu	Autre
11		Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre	Bleu
12		Autre	Autre	Bleu	Autre	Autre	Bleu

…

GL	GM	GN	GO	GP	GQ	GR	GS
Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre	Bleu	Autre	Autre
Autre	Bleu	Bleu	Autre	Autre	Autre	Bleu	Bleu
Autre	Autre	Bleu	Autre	Autre	Bleu	Autre	Autre
Autre	Bleu	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Bleu
Autre	Autre	Bleu	Bleu	Autre	Autre	Bleu	Autre
Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre	Bleu	Autre	Autre
Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre	Autre	Autre	Autre
Autre	Bleu	Autre	Autre	Bleu	Autre	Bleu	Bleu
Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre	Autre	Autre	Autre
Autre	Bleu	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre

…

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
52		Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre	Autre	Bleu	Bleu	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre
53	Nombre d'enfants aux yeux bleus	9	13	14	22	10	14	11	11	11	12	12	14	17	10	12
54	Numéro de l'échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
55																
56	Nombre d'enfants aux yeux bleus	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
57	Nombre d'échantillons	0	0	0	0	2	0	3	5	8	12	17	19	25	29	28



À l’aide de la colonne B3 : B52 obtenue à la question précédente copiée et tirée vers la droite jusqu’en GS, on obtient 200 échantillons de 50 personnes.

Dans la plage A56:AZ57, figure un tableau récapitulatif des résultats obtenus dans les 200 échantillons du dessus.

Quelle formule (utilisant la fonction “nb.si”) faut-il inscrire dans la cellule B57 pour obtenir le total des échantillons ayant le nombre d’enfants aux yeux bleus correspondant au nombre inscrit en B56 ?

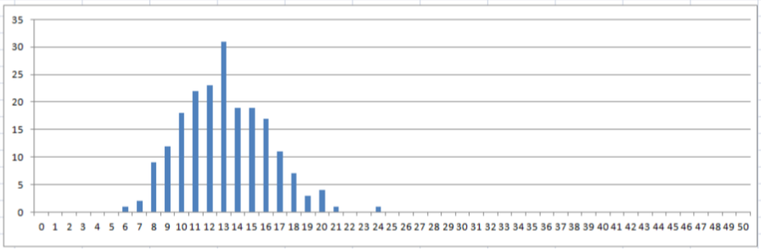
Copier et tirer cette formule vers la droite jusqu’en AZ57.

=NB.SI($B53:$GS53;B56)

La touche F9 permet ensuite d’obtenir une nouvelle série de 200 échantillons aléatoires.

4. La feuille 4 est un complément de la feuille 3 avec en plus, à partir d’une ligne d’effectifs cumulés, les bornes de l’intervalle de fluctuation ; en effet une mise en forme conditionnelle permet de colorier en vert les 5 % d’échantillons exclus parmi les valeurs extrêmes.

	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
52	Bleu	Autre	Bleu	Autre	Bleu	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Autre	Bleu	Autre	Autre
53	16	10	11	10	12	10	10	14	11	17	17	9	13	11	12	11	14
54	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
55																	
56	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
57	0	1	2	9	12	18	22	23	31	19	19	17	11	7	3	4	1
58	0	1	3	12	24	42	64	87	118	137	156	173	184	191	194	198	199



5.

5.A. En reprenant les méthodes utilisées dans les questions précédentes, sur la feuille 5 obtenir 1000 échantillons de 50 personnes, en visualisant et en totalisant ceux qui ont les yeux bleus, puis en faire une synthèse numérique et graphique sous forme d’histogramme.

5.B. À partir de ces 1 000 échantillons, calculer le nombre moyen d’enfants ayant les yeux bleus au sein d’un échantillon de 50 personnes, et vérifier que la fréquence correspond bien à celle donnée par l’étude statistique effectuée au Canada.

Activité 2 – Utilisation des résultats relatifs aux intervalles de fluctuation donnés par le professeur

<u>Utilisation du cours de seconde</u>

1. Rappel.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, relatif aux échantillons de taille *n*, est l'intervalle centré autour de *p*, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille *n*. Cet intervalle peut être obtenu, de façon approchée, par simulation. Le professeur peut indiquer aux élèves le résultat suivant, utilisable dans la pratique pour des échantillons de taille $n \geq 25$ et des proportions *p* du caractère comprises entre 0,2 et 0,8 : si *f* désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, *f* appartient à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'au moins 0,95. Le professeur peut faire percevoir expérimentalement la validité de cette propriété mais elle n'est pas exigible.

2. Calculer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % relatif aux échantillons de taille 50 centré autour de la proportion des yeux bleus au Canada. (arrondir à 10^{-2} près).

Avec $p = 0,26$ et $n = 50$, on obtient [0,12 ; 0,40]

3. Répondre à la question proposée au début. Dans un village canadien, on a observé que parmi 50 enfants, 24 ont les yeux bleus. Peut-on considérer que cet échantillon est aléatoire ?

0,48 n'appartient pas à l'intervalle [0,12 ; 0,40]

4. Déduire de la question 2 quelles sont la valeur minimale et la valeur maximale du nombre d'enfants aux yeux bleus que l'on peut observer dans un échantillon de 50 personnes pour que cet échantillon puisse être considéré comme aléatoire.

min : 6 et max : 20

<u>Utilisation du cours de première</u>

1. Définition.

Pour un échantillon de taille *n*, l'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence, correspondant à la réalisation d'une variable aléatoire *X* qui suit une loi binomiale, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où *a* et *b* sont tels que :

- *a* est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- *b* est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

2. À l'aide du tableur ou de votre calculatrice (si elle est dotée de cette fonctionnalité (**Binominal CD()** pour les modèles Casio, ou **binomFRép()** pour les modèles TI …), construire une table des valeurs des probabilités $P(X \leq k)$, où *X* suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,26$ et *k* varie de 0 à 50.

3. À l’aide de la question précédente ou du document ci-dessous extrait d’un tableur, déterminer les entiers *a* et *b* indiqués dans la définition donnée précédemment, puis en déduire l’intervalle de fluctuation à 95 %.

C3 | =LOI.BINOMIALE(B3;50;0,26;1)

	A	B	C	D	E
1					
2		k	P(X ≤ k)		
3		0	2,89458E-07		
4		1	5,37454E-06		
5		2	4,91474E-05		
6		3	0,000295222		
7		4	0,001311112		
8		5	0,004594905		
9		6	0,013248146		
10		7	0,032358778		
11		8	0,068449465		
12		9	0,127625186		
13		10	0,21287021		
14		11	0,321782772		
15		12	0,446149144		
16		13	0,573876769		
17		14	0,692480992		
18		15	0,792493202		
19		16	0,869360694		
20		17	0,923375689		
21		18	0,958169131		
22		19	0,978758138		
23		20	0,9899708		
24		21	0,995598777		
25		22	0,998205347		

k	P(X ≤ k)
0	2,89458E-07
1	5,37454E-06
2	4,91474E-05
3	0,000295222
4	0,001311112
5	0,004594905
6	0,013248146
7	0,032358778
8	0,068449465
9	0,127625186
10	0,21287021
11	0,321782772
12	0,446149144
13	0,573876769
14	0,692480992
15	0,792493202
16	0,869360694
17	0,923375689
18	0,958169131
19	0,978758138
20	0,9899708
21	0,995598777
22	0,998205347
23	0,99932026

4. Comparer le résultat obtenu à celui de la question 1.

on obtient ici [0,14 ; 0,38]

Activité 3 – Algorithmique

1. Simuler avec la calculatrice l'expérience consistant à choisir au hasard un enfant dans la population canadienne et à regarder si ses yeux sont bleus ou non.

Soit R le nombre aléatoire affiché à l'aide de la touche Rand (TI) ou Ran# (Casio).
($R \in [0\ ;\ 1[$).
On convient que :

- si $R \in [0\ ;\ 0{,}26]$, l'enfant choisi au hasard a les yeux bleus
- si $R \in]0{,}26\ ;\ 1[$, l'enfant choisi au hasard n'a pas les yeux bleus.

On peut réaliser un petit programme qui permet d'afficher directement la couleur des yeux :

	TI	Casio
1	Rand $\rightarrow$ R	Ran# $\rightarrow$ R
2	IF R $\leq$ 0.26	R $\leq$ 0.26 $\Rightarrow$ " BLEUS "
3	Then DISP "BLEUS "	R > 0.26 $\Rightarrow$ " AUTRES "
4	Else DISP "AUTRES "	

2.

2.A. Écrire un algorithme permettant de simuler l'expérience consistant à choisir au hasard un échantillon de 50 enfants dans la population canadienne et à dénombrer ceux qui ont les yeux bleus.

Algorithme :

Variable : S : le nombre d'enfants dans l'échantillon qui ont les yeux bleus

Initialisation : S prend la valeur 0

Traitement et sorties :

Pour i variant de 1 à 50
Faire :
Générer un nombre réel R aléatoire compris entre 0 et 1
Lorsque R est inférieur ou égal à 0,26 augmenter S de 1
Fin du pour
Afficher S (*qui indique donc le nombre de fois où le nombre aléatoire a été inférieur ou égal à 0,26*)

PROGRAM : YBLEUS1

	TI	Casio
1	0 $\rightarrow$ S	0 $\rightarrow$ S
2	FOR (I,1,50)	FOR 1 $\rightarrow$ I TO 50
3	Rand $\rightarrow$ R	Ran# $\rightarrow$ R
4	IF R $\leq$ 0,26	R $\leq$ 0,26 $\Rightarrow$ S + 1 $\rightarrow$ S
5	S + 1 $\rightarrow$ S	NEXT
6	END	"NB BLEUS = " : S
7	DISP "NB BLEUS = ", S	

2.B. Écrire un algorithme permettant de simuler l'expérience consistant à choisir au hasard un échantillon de n (n étant un entier quelconque) enfants dans la population canadienne et à dénombrer ceux qui ont les yeux bleus.

Algorithme

Variables :

n : l'effectif de l'échantillon souhaité

S : le nombre d'enfants dans l'échantillon qui ont les yeux bleus

Entrées : Saisir n

Initialisation : S prend la valeur 0

Traitement et sorties :

Pour i variant de 1 à n

Faire :

Générer un nombre réel R aléatoire compris entre 0 et 1

Lorsque R est inférieur ou égal à 0,26 augmenter S de 1

Fin du pour

Afficher S (*qui indique donc le nombre de fois où le nombre aléatoire a été inférieur ou égal à 0,26*)

PROGRAM : YBLEUS2

	TI	**Casio**
1	INPUT "NB ENFANTS = ", N	"NB ENFANTS = " ? $\rightarrow$ N
2	0 $\rightarrow$ S	0 $\rightarrow$ S
3	FOR (I,1,N)	FOR 1 $\rightarrow$ I TO N
4	Rand $\rightarrow$ R	Ran# $\rightarrow$ R
5	IF R $\leq$ 0,26	R $\leq$ 0,26 $\Rightarrow$ S + 1 $\rightarrow$ S
6	S + 1 $\rightarrow$ S	NEXT
7	END	"NB BLEUS = " : S
8	DISP "NB BLEUS = ", S	

3.

3.A. On prélève maintenant 200 échantillons de 50 enfants, parmi lesquels on dénombre à chaque fois ceux qui ont les yeux bleus.

- Simuler cette expérience avec un logiciel de programmation ou avec la calculatrice.

Algorithme

Variables :

S : le nombre d'enfants dans l'échantillon qui ont les yeux bleus

L1 : liste dont l'élément de rang k indique le nombre d'échantillons comportant k enfants aux yeux bleus (cette liste a une longueur de 50+1 à cause du zéro enfant aux yeux bleus dans l'échantillon de 50)

Initialisations :

S prend la valeur 0

Effacer les éléments contenus dans L1 et faire de L1 une liste de dimension 51

Traitement et sorties :

Pour j variant de 1 à 200

Faire :

Pour i variant de 1 à 50

Faire :

Générer un nombre réel R aléatoire compris entre 0 et 1

Lorsque R est inférieur ou égal à 0,26 augmenter S de 1

Fin du pour

Augmenter de 1 l'élément de rang S + 1 de la liste L1 (*en effet l'élément de rang 1 de S correspond au résultat 0 pour S*)

Fin du pour

PROGRAM : YBLEUS3

	TI	Casio
1	CLRLIST L1	{0}→ List 1
2	51 → DIM L1	51 → DIM List 1
3	FOR (J,1,200)	FOR 1 → I TO 200
4	0 → S	0 → S
5	FOR (I,1,50)	FOR 1 → I TO 50
6	Rand → R	Ran# → R
7	IF R ≤ 0,26	R ≤ 0,26 ⇒ S + 1 → S
8	S + 1 → S	NEXT
9	END	List 1(S + 1)+1 →List 1(S+1)
10	L1(S + 1)+1 →L1(S+1)	NEXT
11	END	

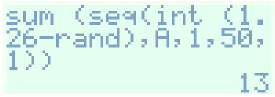
- **Facultatif mais conseillé** : Afin d'éviter un trop grand nombre de boucles imbriquées, trouver une fonction f définie sur [0 ; 1[qui prend la valeur 1 sur [0 ; 0,26] et la valeur 0 sur]0,26 ; 1[, puis rédiger un algorithme en utilisant la somme des valeurs prises par *f*.

Des élèves qui n'ont jamais été exercés à faire ce type de recherche, pourront être aidés par des indications appropriées. Le professeur jugera peut-être utile de leur donner directement la réponse ci-dessous.

On peut prendre pour *f* la fonction définie sur [0 ; 1[par : $f(x) = \text{INT}(1{,}26 - x)$

En utilisant habilement cette fonction et les listes de la calculatrice, on obtient immédiatement la simulation du nombre d'enfants ayant les yeux bleus au sein d'un échantillon d'effectif 50 grâce à la formule suivante : SUM(SEQ(INT(1,26 – Rand), A, 1, 50, 1))

- SUM : calcule la somme des termes d'une liste
- SEQ(F(A), A, 1, 50, 1) : génère une liste obtenue pour A variant de 1 à 50 avec un pas de 1, où F(A) est calculé en fonction de A. Lorsque le calcul proposé (ici INT(1,26 – Rand)) ne dépend pas de A, cela n'empêche l'incrémentation voulue.



Algorithme

Variables :

S : le nombre d'enfants dans l'échantillon n° i qui ont les yeux bleus

L1 : liste dont l'élément de rang k indique le nombre d'échantillons comportant k enfants aux yeux bleus

Initialisation :

Effacer les éléments contenus éventuellement dans L1 et faire de L1 une liste de dimension 51

Traitement et sorties :

Pour i variant de 1 à 200

Faire :

Générer la simulation du nombre d'enfants ayant les yeux bleus au sein d'un échantillon d'effectif 50 grâce à la formule ci-dessus dont on note S le résultat

Augmenter de 1 l'élément de rang S + 1 de la liste L1 (en effet l'élément de rang 1 de S correspond au résultat 0 pour S)

Fin du pour

Afficher L1 (*non recommandé sur une calculatrice dont l'écran ne permet qu'une vue trop partielle*)

PROGRAM : YBLEUS4

	TI	Casio
1	CLRLIST L1	{0}→ List 1
2	51 → DIM L1	51 → DIM List 1
3	FOR (I,1,200)	FOR 1 → I TO 200
4	SUM(SEQ(INT(1,26 – Rand), A, 1, 50, 1)) → S	SUM(SEQ(INT(1,26 – Ran#), A, 1, 50, 1)) → S
5	L1(S + 1)+1 →L1(S+1)	List 1(S + 1)+1 →List 1(S+1)
6	END	NEXT

3.B. Idem avec 200 échantillons de taille *n*.

Remarque 1 : comme indiqué ci-dessus, on obtient "immédiatement" la simulation du nombre d'enfants ayant les yeux bleus au sein d'un échantillon d'effectif n grâce à la formule suivante :
SUM(SEQ(INT(1,26 – Rand), A, 1, n, 1))

Algorithme

Variables :

n : taille de l'échantillon

S : le nombre d'enfants dans l'échantillon qui ont les yeux bleus

L1 : liste dont l'élément de rang i indique le nombre d'échantillons comportant i enfants aux yeux bleus

Entrées : Saisir n

Initialisation : Effacer les éléments contenus éventuellement dans L1 et faire de L1 une liste de dimension n + 1

Traitement et sorties :

Pour i variant de 1 à 200

Faire :

Générer la simulation du nombre d'enfants ayant les yeux bleus au sein d'un échantillon d'effectif n grâce à la formule ci-dessus dont on note S le résultat

Augmenter de 1 l'élément de rang S + 1 de la liste L1 (en effet l'élément de rang 1 de S correspond au résultat 0 pour S)

Fin du pour

Afficher L1 *(non recommandé sur une calculatrice dont l'écran ne permet qu'une vue trop partielle)*

PROGRAM : YBLEUS5

	TI	Casio
1	INPUT "TAILLE ECHANT = ", N	"TAILLE ECHANT = " ? → N
2	CLRLIST L1	{0}→ List 1
3	N+1 → DIM L1	N+1 → DIM List1
4	FOR (I,1,200)	FOR 1 → I TO 200
5	SUM(SEQ(INT(1,26 – Rand), A, 1, n, 1)) → S	SUM(SEQ(INT(1,26 – Ran#), A, 1, n, 1)) → S
6	L1(S + 1)+1 →L1(S+1)	List 1(S + 1)+1 →List 1(S+1)
7	END	NEXT

Remarque 2 : attention la dimension des listes n'est pas illimitée, sur les calculatrices comme sur les ordinateurs….

3.C. Idem avec *p* échantillons de taille *n*.

Algorithme

Variables :

n : taille de l'échantillon

P : nombre d'échantillons

S : le nombre d'enfants dans l'échantillon qui ont les yeux bleus

L1 : liste dont l'élément de rang i indique le nombre d'échantillons comportant i enfants aux yeux bleus

Entrées : Saisir n et P

Initialisation : Effacer les éléments contenus éventuellement dans L1 et faire de L1 une liste de dimension n + 1

Traitement et sorties :

Pour i variant de 1 à P

Faire :

Générer la simulation du nombre d'enfants ayant les yeux bleus au sein d'un échantillon d'effectif n grâce à la formule ci-dessus dont on note S le résultat

Augmenter de 1 l'élément de rang S + 1 de la liste L1 (*en effet l'élément de rang 1 de S correspond au résultat 0 pour S*)

Fin du pour

Afficher L1 (*non recommandé sur une calculatrice dont l'écran ne permet qu'une vue trop partielle*)

PROGRAM : YBLEUS6

	TI	Casio
1	INPUT "TAILLE ECHANT = ", N	"TAILLE ECHANT = " ? → N
2	INPUT "NB ECHANT = ", P	"NB ECHANT = " ? → P
3	CLRLIST L1	{0}→ List 1
4	N+1 → DIM L1	N+1 → DIM List1
5	FOR (I,1,P)	FOR 1 → I TO P
6	SUM(SEQ(INT(1,26 – Rand), A, 1, n, 1)) → S	SUM(SEQ(INT(1,26 – Ran#), A, 1, n, 1)) → S
7	L1(S + 1)+1 →L1(S+1)	List 1(S + 1)+1 →List 1(S+1)
8	END	NEXT

4. Approfondissement.
À partir d'une simulation telle que celle définie à la question 3.A., écrire un algorithme permettant de déterminer les bornes de l'intervalle de fluctuation à 0,95 : $I_{0,95}$. Dans cette approche, on considérera que $I_{0,95}$ est obtenu sous la forme [*a* ; *b*] où a est la plus petite valeur du caractère telle que 2,5 % au moins de l'effectif a une valeur du caractère inférieure ou égale à *a* et *b* est la plus petite valeur du caractère telle que 2,5 % au plus de l'effectif a une valeur du caractère supérieure ou égale à *b*. (Sur ordinateur, ne pas hésiter à prendre un grand nombre d'échantillons, par exemple 100 000).

Algorithme

Variables :

S : le nombre d'enfants dans l'échantillon qui ont les yeux bleus

L1 : liste dont l'élément de rang k indique le nombre d'échantillons comportant k enfants aux yeux bleus

L2 : liste dont l'élément de rang k indique la somme des éléments de rang inférieur ou égal à k de la liste L1 (pour obtenir la somme cumulée croissante de L1)

Initialisation : Effacer les éléments contenus éventuellement dans L1 et L2 et faire de L1 et L2 deux listes de dimension 51

Traitement et sorties :

Pour i variant de 1 à 200

Faire :

Générer la simulation du nombre d'enfants ayant les yeux bleus au sein d'un échantillon d'effectif 50 grâce à la formule ci-dessus dont on note S le résultat

Augmenter de 1 l'élément de rang S + 1 de la liste L1 (*en effet l'élément de rang 1 de S correspond au résultat 0 pour S*)

Fin du pour

Affecter au premier terme de L2 la même valeur que le premier terme de L1 (*ce sera très fréquemment la valeur 0*)

Pour k variant de 2 à 51

Affecter au terme de rang k de L2 la somme du terme de rang k – 1 de L2 et du terme de rang k de L1 (*cela revient à calculer la somme progressive des termes de L1, ou effectifs cumulés*)

Fin du pour

Affecter à k la valeur 1

Tant que le terme de rang k de L2 est inférieur ou égal à 5 (*qui représente 2,5 % du nombre des échantillons*)

Faire k + 1 donne k

Dès que le terme de rang k de L2 est strictement supérieur à 5

Faire k – 1 donne A

Fin du Tant que

Affecter à k la valeur 51

Tant que le terme de rang k de L2 est supérieur ou égal à 195 (*qui représente 97,5 % du nombre des échantillons*),

Faire k – 1 donne k

Dès que le terme de rang k de L2 est strictement inférieur à 5

Faire k + 1 donne B

Fin du Tant que

Afficher les bornes A et B de l'intervalle de fluctuation

PROGRAM : YBLEUS7

	TI	**Casio**
1	CLRLIST L1	{0}→ List 1
2	51 → DIM L1	51 → DIM List 1
3	51 → DIM L2	51 → DIM List 2
4	FOR (I,1,200)	FOR 1 → I TO 200
5	SUM(SEQ(INT(1,26 – Rand), A, 1, 50, 1)) → S	SUM(SEQ(INT(1,26 – Ran#), A, 1, 50, 1)) → S
6	L1(S + 1)+1 →L1(S+1)	List 1(S + 1)+1 →List 1(S+1)
7	END	NEXT
8	L1 (1) →L2(1)	List 1 (1) →List 2 (1)
9	FOR (K,2,51)	FOR 1 →K TO 51
10	L2(K – 1) + L1(K) →L2(K)	List2(K – 1) + List1(K) →List2(K)
11	END	NEXT
12	1 → K	1 → K
13	WHILE L2(K)≤ 5	LpWhile List2(K)≤ 5
14	K + 1 → K	K + 1 → K
15	K – 1 → A	K – 1 → A
16	END	Next
17	51→ K	51→ K
18	WHILE L2(K)≥195	LpWhile List2(K) ≥19 5
19	K – 1 → K	K – 1 → K
20	K + 1 → B	K + 1 → B
21	END	Next
22	DISP “BORNES DE L’INTER DE FLUCT”	“BORNES DE L’INTER DE FLUCT”
23	DISP “BORNE INF=”,A	“BORNE INF=” : A
24	DISP “BORNE SUP=”,B	“BORNE SUP=”: B

*Remarque : avec 100 000 (resp N) échantillons, on remplace le 5 de la ligne 12 par 2 500 (resp N*0,025) et le 195 de la ligne 17 par 97 500 (resp N*0,975).*

Annexe pour le professeur

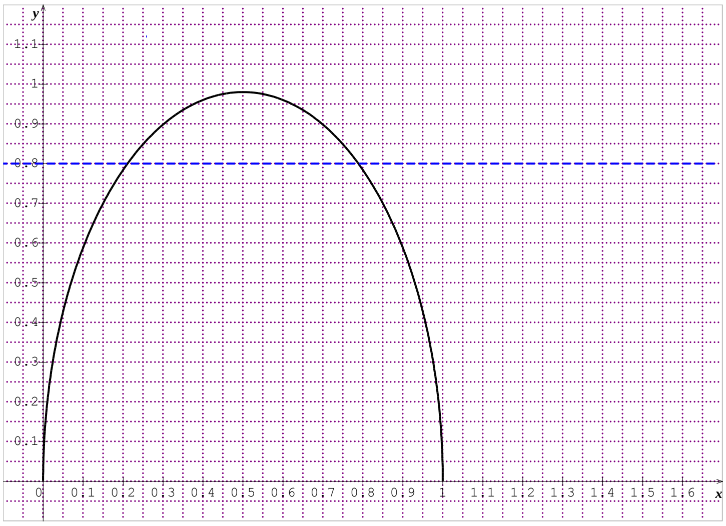
Lorsque la grandeur observée est une proportion d'individus satisfaisant certains critères dans l'échantillon, l'intervalle de fluctuation est déterminé par la loi binomiale. Si la taille de l'échantillon est suffisamment importante, cette loi est approchée par la loi normale en vertu du théorème central limite. Il en découle une formulation explicite de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, pour un échantillon de taille n censé satisfaire certaines propriétés avec une proportion p :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Si la probabilité p varie entre 0,2 et 0,8, cet intervalle est parfois approché par un intervalle à la formulation plus simple :

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Cela peut-être facilement visualisé grâce à la courbe de la fonction f telle que $f(x) = 1{,}96\sqrt{x(1-x)}$ obtenue ci-dessous à l'aide d'un grapheur :



Par un calcul simple avec des inégalités :

$1{,}96 < 2$ et pour $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$, on a donc $0{,}4 \leq \sqrt{p(1-p)} \leq 0{,}5$.

Ainsi $1{,}96\sqrt{p(1-p)}$ est compris entre 0,8 et 1.

Comparaison des résultats obtenus entre :

- d'une part la fréquence des yeux bleus par simulation au sein de 1 000 échantillons de 50 enfants,
- d'autre part la distribution du modèle théorique constitué par la loi normale B (50 ; 0,26)

Nombre d'enfants aux yeux bleus	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Fréquence des échantillons	0	0	0	0,001	0	0	0,01	0,02	0,039	0,072	0,089	0,108	0,109	0,13
Loi binomiale	2,89458E-07	5,1E-06	4,37729E-05	0,00024607	0,00101589	0,00328379	0,00865324	0,01911063	0,03609069	0,05917572	0,08524502	0,10891256	0,12436637	0,12772762