

 <p>académie Versailles</p> <p>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE</p>  <p>Liberté • Égalité • Fraternité REPUBLIQUE FRANÇAISE</p>	BTS FED Option : Domotique et bâtiments communicants	
	<p>Nom :</p> <p>Prénom :</p> <p>Établissement : Lycée Jean Jaurès</p> <p>Ville : Châtenay-Malabry</p>	
<p>Épreuve E3 : Mathématiques</p>	<p>Situation d'évaluation n°1</p>	<p>Date :</p> <p>Durée : 55 min</p>

Le sujet est composé de deux exercices indépendants. Il comporte 4 pages.

L'usage de la calculatrice ou des logiciels installés sur les ordinateurs est autorisé.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dans la suite du document :

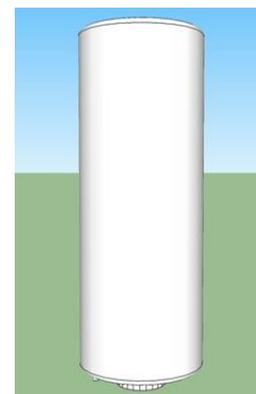
- Pour les questions signalées par une  , il existe une fiche d'aide. La réclamer si besoin.
- Les appels au professeurs mentionnés en gras après certaines questions font partie intégrante de l'évaluation et sont donc obligatoires.

Thèmes : étude de fonction, calcul intégral, loi de probabilité.

Exercice 1

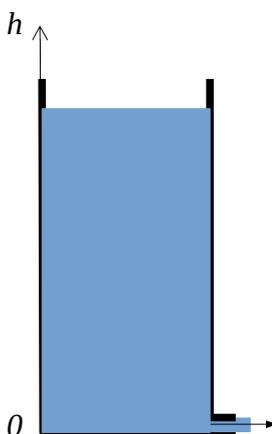
On considère un chauffe-eau électrique, dont on ouvre le robinet de purge. On se pose la question suivante :

En combien de temps ce chauffe-eau va-t-il se vider ?



Partie A : la vitesse de sortie

Le chauffe-eau est un cylindre de 50 cm de diamètre et de 150 cm de hauteur. Le robinet de purge est situé tout en bas, comme indiqué sur la figure ci-dessous. C'est aussi un cylindre, de diamètre 2 cm, et de longueur négligeable.



On considère que la pression à la surface de l'eau est égale à celle à la sortie du robinet, et l'on admet que la section s du robinet est négligeable devant la section S du chauffe-eau.

Dans de telles conditions, la mécanique des fluides nous dit que la vitesse de sortie du liquide est $v = \sqrt{2gh}$, exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, avec :

- g l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, que l'on prendra égale à $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- h la différence d'altitude entre le robinet et la surface de l'eau, en mètre.

1.  Proposer une modélisation de la vitesse de sortie à l'aide d'une fonction, dont on précisera l'ensemble de définition.
2.  Étudier la fonction sur son ensemble de définition.

Appeler le professeur pour expliquer vos réponses aux questions 1 et 2

Partie B : le débit sortant

On veut maintenant étudier le débit d'eau sortant par le robinet de purge.

La formule du débit est $q_{\text{sortie}} = v \times s_{\text{robinet}}$, exprimé en $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$, avec :

- v la vitesse de sortie de l'eau ;
- s_{robinet} la section du robinet de purge, exprimée en m^2 .

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique du débit sortant, en fonction de la hauteur d'eau.

Appeler le professeur pour vérification

2. Comment évolue le débit sortant, en fonction de la hauteur d'eau ?

Partie C : le temps de vidange

Pour trouver le temps de vidange du chauffe-eau, un physicien nous propose son aide. Mais il est bloqué au moment de réaliser ces 2 calculs :

$$I_1 = \int_0^H \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{S_{\text{robinet}}}{S} \int_0^T \sqrt{2gh} dt, \quad \text{avec :}$$

- H la hauteur d'eau initiale, en mètre.
 - S la section du chauffe-eau ;
 - T le temps de vidange.
1. À l'aide des données de l'énoncé, calculer I_1 en fonction de H , puis I_2 en fonction de T .
 2. D'après le physicien, $I_1 = I_2$. Montrer que $T = \frac{S}{S_{\text{robinet}}} \sqrt{\frac{2H}{g}}$.
 3. Calculer le temps de vidange. On rappelle que la hauteur H est égale à 1,5 m. On arrondira le résultat à la seconde.

Remarque historique : la formule $v = \sqrt{2gh}$ est appelée formule de Toricelli, du nom d'Evangelista Torricelli (1608-1647), physicien et mathématicien italien, connu notamment pour avoir inventé le baromètre.

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Une entreprise de sécurité électronique a équipé un grand centre commercial de caméras de surveillance. Le contrat prévoit l'installation et l'entretien des caméras en cas de dysfonctionnement.



Celles-ci sont au nombre de 500.

L'entreprise estime que la probabilité pour qu'une caméra soit défectueuse un jour donné est de 8×10^{-3} . On suppose que les pannes quotidiennes de ces caméras sont indépendantes les unes des autres.

L'entreprise de sécurité envoie un technicien quand au moins une caméra est défectueuse, mais celui-ci ne peut pas réparer plus de 8 caméras dans la journée. Sinon, il faut envoyer un technicien supplémentaire.

1.  Proposer une démarche permettant de calculer la probabilité qu'un nombre x de caméra(s) tombe(nt) en panne un jour donné.

Appeler le professeur pour exposer votre démarche

2. En mettant en œuvre cette démarche, calculer :
 - a) la probabilité que quatre caméras tombent en panne un jour donné ;
 - b) la probabilité que l'entreprise envoie un et un seul technicien un jour donné ;
 - c) la probabilité que, si un seul technicien se déplace, celui-ci doive réparer au moins quatre caméras.

Aide pour l'exercice 1, partie A, question 1

Soit x la hauteur d'eau dans le chauffe-eau. Soit f la fonction représentant la vitesse de sortie de l'eau, en fonction de la hauteur d'eau. Exprimer f en fonction de x .

Aide pour l'exercice 1, partie A, question 2

- a) Dériver la fonction f .
 - b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - c) En déduire le tableau de variation de f .
-

Aide pour l'exercice 2, question 1

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de caméras défectueuses un jour donné.
Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale, et préciser les paramètres de cette loi.

Aide pour l'exercice 1, partie A, question 1

Soit x la hauteur d'eau dans le chauffe-eau. Soit f la fonction représentant la vitesse de sortie de l'eau, en fonction de la hauteur d'eau. Exprimer f en fonction de x .

Aide pour l'exercice 1, partie A, question 2

- d) Dériver la fonction f .
 - e) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - f) En déduire le tableau de variation de f .
-

Aide pour l'exercice 2, question 1

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de caméras défectueuses un jour donné.
Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale, et préciser les paramètres de cette loi.
