

Valeur approchée d'un nombre

une notion qui ne peut pas être approximative

A solid orange horizontal bar spanning the width of the slide, located at the bottom.

Un peu d'histoire (1)

Au cours de l'histoire, les hommes ont inventé des nombres pour compter, mesurer...

Les nombres entiers et les fractions sont utilisés dès l'antiquité (les premiers chiffres sumériens écrits datent de -3400 , les premières fractions égyptiennes de -3000).

En -1800 , les Babyloniens utilisent des fractions sexagésimales (les dénominateurs sont des puissances de 60 comme $\frac{7\,563}{3\,600} = 2 + \frac{6}{60} + \frac{3}{60^2}$) mais certaines fractions comme $\frac{9}{14}$ ne peuvent s'écrire comme somme de fractions sexagésimales car aucune puissance de 60 n'est pas un multiple de 7. Cette fraction peut être approximée par la fraction sexagésimale $\frac{38}{60} + \frac{34}{60^2}$ car

$$\frac{38}{60} + \frac{34}{60^2} - \frac{9}{14} = -\frac{1}{12\,600}.$$

De même, la tablette babylonienne YBC 7289 contient une approximation du nombre $\sqrt{2}$ par la fraction sexagésimale $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$.

En effet $0 \leq \sqrt{2} - \left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}\right) \leq 6 \times 10^{-7}$.



Un peu d'histoire (2)

A la fin du VIII^e siècle le mathématicien arabe Al-Khwârizmî publie un ouvrage sur le système décimal d'origine indienne, présente le système de notation des fractions (fractions indiennes, décimales et sexagésimales).

Au X^e siècle, le syrien Al-Uqlidisi invente les fractions décimales et les nombres décimaux. Il perfectionne l'usage de la fraction décimale, utilisant un séparateur pour distinguer la partie entière de la partie décimale

Le mathématicien iranien Al-Kashi donne le premier exposé systématique sur les fractions décimales, à la fois théorique et pratique. Ses disciples suivront, et elles parviendront à Vienne en 1562 sous l'appellation... "fractions des Turcs"!

En 1579, le mathématicien français François Viète souhaite ne plus utiliser les fractions sexagésimales et le flamand Simon Stevin, comptable de formation, fait adopter les nombres décimaux par les mathématiciens européens.

Depuis, les nombres décimaux font partie de notre quotidien et c'est le plus souvent à eux qu'on fait appel pour donner « une valeur approchée » d'un nombre qu'on ne sait pas calculer de façon exacte.

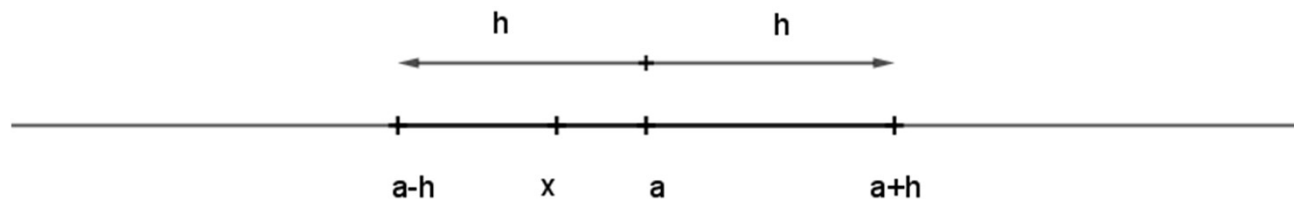
Définition

Soit x et a deux nombres et h un nombre réel strictement positif.

Le nombre a est **une valeur approchée** de x à h près ou à la précision h si et seulement si

$|x - a| \leq h$ c'est-à-dire si et seulement si $a - h \leq x \leq a + h$.

Cela signifie que la distance entre x et a , c'est-à-dire l'erreur commise en remplaçant x par a est inférieure ou égale à h .



Remarque : l'encadrement $a - h \leq x \leq a + h$ a pour amplitude $2h$.

Quelques remarques

- On dit « **une** » valeur approchée car il y a en fait une infinité de valeurs approchées du nombre de x à h près : tous les nombres de l'intervalle $[a - h, a + h]$.
- si a est **une valeur approchée** de x à h près alors x est **une valeur approchée** de a à h près car $|x - a| = |a - x|$.
- la précision d'une valeur donnée est la plupart du temps définie par une puissance de 10 mais la précision d'une valeur approchée n'est pas déterminée par le nombre de décimales.

Valeur approchée et arrondi : deux notions différentes

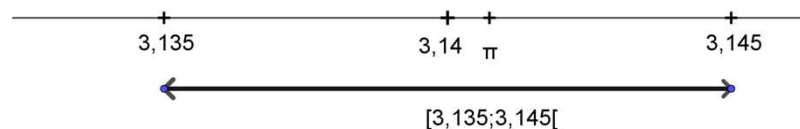
Une calculatrice affiche 3,141593 pour le nombre π . On écrit alors de façon non rigoureuse $\pi \approx 3,14$ et on dit que 3,14 est **l'arrondi** à 10^{-2} près de π car la troisième décimale appartient à $\{0,1,2,3,4\}$.

Définition : on appelle **arrondi** (ou **valeur arrondie**) d'un nombre positif x à 10^{-n} le nombre **décimal** a tel que $a \times 10^n$ est entier et $a - 5 \times 10^{-n-1} \leq x < a + 5 \times 10^{-n-1}$ ou encore $a \times 10^n - 0,5 \leq x \times 10^n < a \times 10^n + 0,5$

La précision de l'arrondi est déterminée par une puissance de 10, la plupart du temps correspondant à une décimale.

On a en effet $3,135 \leq \pi < 3,145$ soit $314 - 0,5 \leq 100\pi < 314 + 0,5$ et 3,14 est **le seul nombre décimal** tel que

$100 \times 3,14$ c'est-à-dire 314 soit un entier appartenant à l'intervalle $[313,5; 314,5[$.



3,14 est **une** valeur approchée de π à 10^{-2} près signifie que $3,14 - 0,01 \leq \pi \leq 3,14 + 0,01$ soit $3,13 \leq \pi \leq 3,15$

La notion de valeur approchée est donc plus générale que la notion d'arrondi. De plus, dans le cas de l'arrondi de π , l'amplitude de l'encadrement est 10^{-2} et dans le cas d'**une** valeur approchée l'amplitude de l'encadrement est 2×10^{-2} .

Choix de la précision : choix fondamental

Les physiciens qui parlent souvent de deux chiffres significatifs mais la précision dépend du contexte et elle peut ou doit parfois changer dans le courant de l'étude.

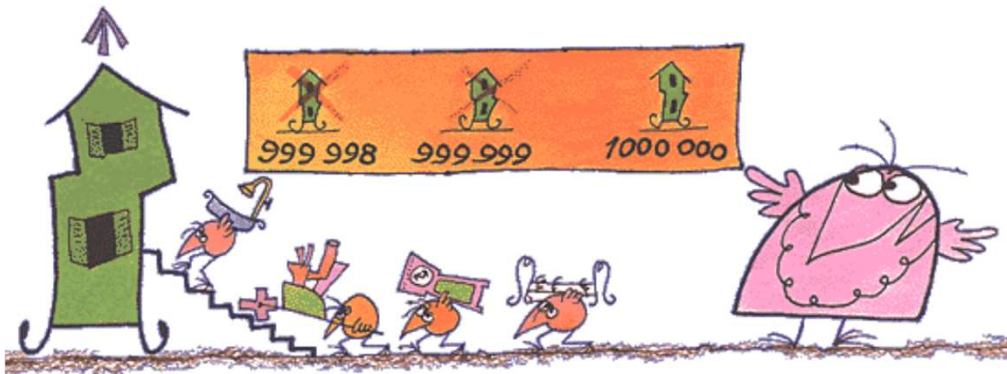
En passant de la fusée Ariane 4 à la fusée Ariane 5, le maintien d'une précision suffisante pour la première fusée mais insuffisante pour la deuxième a causé l'explosion de la fusée Ariane 5.

En effet, les conditions de vol étant différentes entre Ariane 4 et Ariane 5, la valeur d'une donnée traitée par ce dispositif se trouvait, dans Ariane 5, dépasser les limites prévues pour Ariane 4.



Un peu d'humour

La probabilité de réussir la mise sur orbite d'une fusée est d'une chance sur un million. Dépêchons-nous de rater 999.999 lancements !



Valeurs approchées et opérations

Question : si on suppose que 3,14 est une valeur approchée de π à 10^{-2} près et 2,35 est une valeur approchée de r à 10^{-2} près, peut-on trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire d'un disque de rayon r ?

On traduit les données en termes d'inégalités : $3,13 \leq \pi \leq 3,15$ et $2,34 \leq r \leq 2,36$.

En appliquant les propriétés sur les opérations avec des inégalités, on en déduit :

$$2,34^2 \leq r^2 \leq 2,36^2 \text{ soit } 5,4756 \leq r^2 \leq 5,5696$$

$$\text{puis } 3,13 \times 5,4756 \leq \pi r^2 \leq 3,15 \times 5,5696 \text{ soit } 17,13863 \leq \pi r^2 \leq 17,54424.$$

On constate que l'amplitude de l'encadrement obtenu est 0,40561 et donc que la précision est $\frac{0,40561}{2}$ soit un peu plus de 2×10^{-1} qui est **20 fois moins bien que la précision de départ**.

Conclusion: pour assurer une précision à la fin des calculs, il faut bien réfléchir aux opérations qui interviennent.

Valeurs approchées et comparaisons

Question : sachant que 1,73 est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près, que 1,41 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près et que 3,14 est une valeur approchée de π à 10^{-2} près, peut-on comparer les nombres $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et π ?

On sait donc que $1,72 \leq \sqrt{3} \leq 1,74$ et $1,40 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$ d'où, en appliquant les propriétés sur les opérations avec des inégalités $3,12 \leq \sqrt{3} + \sqrt{2} \leq 3,16$.

D'autre part $3,13 \leq \pi \leq 3,15$.

Pour comparer les deux nombres, on étudie le signe de leur différence : $-3,15 \leq -\pi \leq -3,13$ donc $3,12 - 3,15 \leq \sqrt{3} + \sqrt{2} - \pi \leq 3,16 - 3,13$ soit $-0,03 \leq \sqrt{3} + \sqrt{2} - \pi \leq 0,01$ et on ne peut conclure.

En revanche, en considérant des valeurs approchées à 10^{-4} près, on aboutit à l'encadrement $0,0043 \leq \sqrt{3} + \sqrt{2} - \pi \leq 0,0049$ et on peut affirmer que $\sqrt{3} + \sqrt{2} > \pi$.

Là encore, il faut anticiper ou recommencer son travail pour pouvoir affirmer un résultat.

Valeur approchée : maîtrise de l'erreur

Une valeur approchée peut être citée comme solution, mais il faut éviter de s'en servir dans de nouveaux calculs, au risque d'obtenir une valeur plus aussi approchée que l'on veut.

Définition : on appelle **erreur absolue** en remplaçant un nombre x par une valeur approchée a , le nombre $|x - a|$.

Il est donc nécessaire de maîtriser l'erreur absolue commise en remplaçant le(s) nombre(s) étudié(s) par une valeur approchée. Cette majoration de l'erreur est appelée **incertitude**.

Lorsque des opérations interviennent, il faut savoir que :

- dans une somme ou une différence, les incertitudes s'ajoutent ;
- dans un produit ou un quotient, les incertitudes se multiplient.

Il faut donc anticiper ces « propagations de l'incertitude » avant de se lancer dans les calculs.

Valeurs approchées et suites (1)

Un des moyens classiques de trouver une valeur approchée d'un nombre x est de caractériser ce nombre comme limite d'une suite (u_n) qui converge vers ce nombre en majorant le nombre $|u_n - x|$.

Définition 1 : on appelle suite numérique toute fonction f de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$.

On note alors $u_n = f(n)$.

Définition 2 : on dit qu'une suite (u_n) converge vers un nombre réel x lorsque pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - x| \leq \varepsilon$.

Exemple : soit, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Alors $|u_n| = |v_n| = \frac{1}{n}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ équivaut à $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Il suffit donc de choisir un n_0 vérifiant $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Les deux suites convergent donc vers 0.

Valeurs approchées et suites (2)

Résolution d'une équation du type $f(x) = 0$ ou du type $f(x) = x$. On définit une suite qui converge vers la solution de cette équation.

Exemple 1 : soit l'équation $x^3 + 4x - 1 = 0$. On définit sur $\mathbf{R}$ la fonction f par $f(x) = \frac{1}{4}(1 - x^3)$.

Exemple 2 : soit l'équation $\frac{e^x}{e^{2x}+1} = x$. On définit sur $\mathbf{R}$ la fonction f par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

On montre que l'équation considérée admet une unique solution α et on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

On démontre que :

- dans l'exemple 1, pour tout entier n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{64}\right)^n$;
- dans l'exemple 2, pour tout entier n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Dans les deux cas, pour chaque précision ε voulue, on peut déterminer à partir de quel entier n , le nombre u_n est une valeur approchée de α à ε près.

Approximation décimale d'un nombre

Définition : Un nombre d est décimal lorsqu'il existe un entier naturel k tel que $10^k d$ est un entier relatif.

Théorème : pour tout nombre réel x et tout entier k , il existe un unique nombre décimal x_k tel que $10^k x_k \in \mathbb{Z}$ et $x_k \leq x < x_k + 10^{-k}$.

Dans ce cas, le nombre x_k est une **valeur approchée par défaut** du nombre x à 10^{-k} près. Cela implique que tout nombre réel admet une valeur approchée décimale à n'importe quelle puissance de 10 près.

Exemple : $1,414213 \leq \sqrt{2} < 1,414214$ et $10^6 \times 1,414213$ est l'entier 1 414 213 donc 1,414213 est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près.

Théorème: Pour tout nombre réel x , il existe une infinité d'entiers a_n tels que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Cette somme infinie est appelée **développement décimal** du nombre x

Théorème : un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.

Exemple : $\frac{7}{11} = 0,636363 \dots = 0,\overline{63}$ et $\frac{7}{12} = 0,583333 \dots = 0,58\overline{3}$

Valeur approchée et calculatrice

On ne peut garantir une valeur approchée à la simple lecture de l'affichage d'une calculatrice.

Exemple : si on tape 1,99999999999999 EXE, la calculatrice affiche 2.

Mais la séquence 1,99999999999999 – 2 EXE donne l'affichage -1E -12 qui correspond à 10^{-12} .

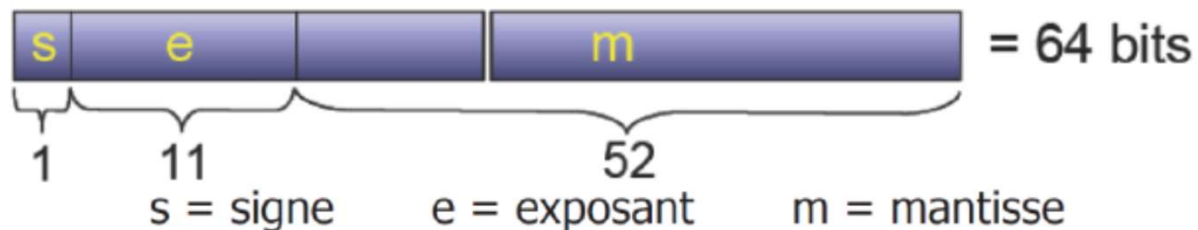
On ne peut donc écrire directement « d'après la calculatrice, ... est une valeur approchée de ... ».

On écrit « la calculatrice affiche ... » et ensuite on étudie ce qu'on peut en déduire éventuellement en termes de valeur approchée.

Nombres « virgule flottante »

La norme IEEE-754

Double précision = 2 X 32 bits



$$\text{Nombre} = (-1)^s \times 1.m \times 2^{e-1023}$$

$$\text{Valeur absolue min} = 2,225... 10^{-308}$$

$$\text{Valeur absolue max} = 1,797... 10^{308}$$

$$\text{Erreur relative} = 2,220446049 \times 10^{-16}$$

soit 16 chiffres maximum de précision

Meilleure approximation affine : définition

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit a un réel de I .

f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ et une fonction ε tels que :

Pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + (x - a)\ell + (x - a)\varepsilon(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

ℓ est le nombre dérivé en a de f , noté $f'(a)$.

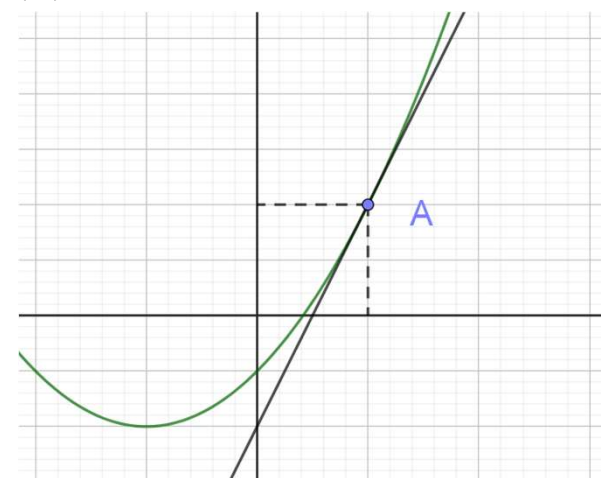
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en

$a \in I$ de nombre dérivé $f'(a)$.

On appelle **fonction affine tangente** à f en a la fonction g définie pour tout $x \in I$ par $g(x) = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

On dit que g est « la meilleure **approximation affine** » de f au **voisinage** de a .



Approximation affine : exemple

Augmenter un nombre x de p % revient à la multiplier par $1 + \frac{p}{100}$. Si on répète n fois cette augmentation, on multiplie le nombre x par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. On pose $\frac{p}{100} = t$ et on considère la fonction f définie par, pour tout réel t , $f(t) = (1 + t)^n$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f'(t) = n(1 + t)^{n-1}$.

L'approximation affine g de f en 0 est définie par $g(t) = nt + 1$.

L'erreur commise est $(1 + t)^n - (1 + nt) = t \underbrace{\left(t^{n-1} + nt^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}t\right)}_{\varepsilon(t)}$.

Elle est d'autant plus petite que t est « proche » de 0.

Une augmentation de 1% répétée 5 fois correspond à multiplier le nombre initial par $1,01^5 = 1,05101$ qu'on peut approximer par $1 + 5 \times 0,01 = 1,05$ mais une augmentation de 10% répétée 5 fois correspond à multiplier le nombre initial par $1,10^5 = 1,61051$ qu'on peut plus difficilement approximer par $1 + 5 \times 0,10 = 1,50$.

Il faut donc se méfier des approximations qui n'en sont pas.

Approximations polynomiales – Développements limités (1)

On peut généraliser le principe en approximant une fonction par une fonction polynôme.

On peut successivement démontrer, en étudiant les variations puis le signe de fonctions, que pour tout réel positif x :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\text{D'où on déduit que } \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right| \leq \frac{x^7}{5040}$$

Exemples :

Si $x = 10^{-1}$ alors $\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right| \leq 3 \times 10^{-7}$ ce qui signifie que $0,1 - \frac{0,001}{6} + \frac{0,00001}{120}$ est une valeur approchée de $\sin 0,1$ à 3×10^{-7} près.

Et même, si $x = 1$ alors $\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right| \leq 2 \times 10^{-4}$ ce qui signifie que $1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}$ est une valeur approchée de $\sin 1$ à 2×10^{-4} près.

Approximations polynomiales – Développements limités (2)

Le travail mené précédemment peut se poursuivre à l'infini.

Théorème : Si une fonction f est de classe C^n (n fois dérivable et sa dérivée n^e est continue) sur un intervalle I , alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point $a \in I$ donné par

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + h^n \varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On note aussi cela :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + o(h^n).$$

Ce théorème permet d'obtenir des valeurs approchées au voisinage de a et à la précision souhaitée en travaillant avec des fonctions polynômes.

Développements limités de fonctions usuelles

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$$