

Une épopée des nombres

« Compter » avant les nombres

Dans leur histoire, les hommes ont eu recours à diverses méthodes pour évaluer un nombre d'objets ou des effectifs de populations :

- Au paléolithique, des encoches sur un bâton permettaient de dénombrer de petits ensembles.
- Avant de partir au combat, des guerriers en Abyssinie déposaient chacun une pierre et ceux qui revenaient la reprenaient là où ils l'avaient déposée, ce qui permettait d'évaluer l'ampleur des pertes en hommes.
- Des bergers enfilait des perles pour compter leurs têtes de bétail et repérer s'ils avaient ou non perdu des bêtes.

Cela ne pouvait vraiment fonctionner que pour de petits nombres et ne permettait pas des opérations comme des multiplications, d'où la nécessité de modes de comptage plus élaborés.

La genèse des « bases » de systèmes de calculs

Encoches et chiffres romains où le regroupement par cinq :

~~Le regroupement par cinq comme IIII / IIII / IIII / est une première approche qui débouche sur IIIIVIIIIXIIIIVI... puis sur I II III IV VI VII VIII IX X XI ...~~

Une autre approche du regroupement par cinq est l'utilisation des mains voire des pieds :

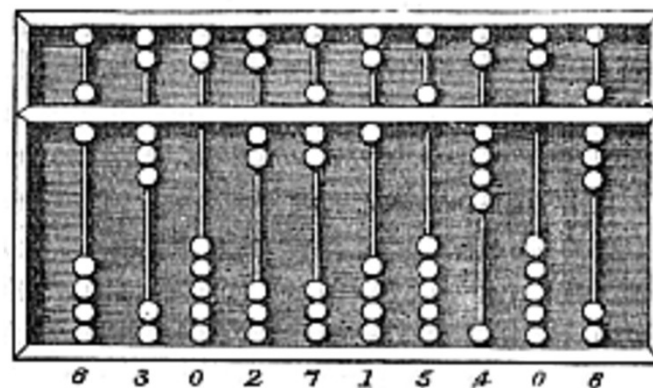
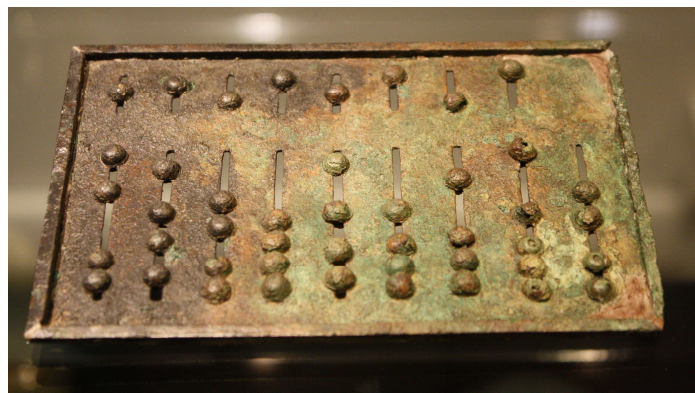
- on commence naturellement par compter sur ses dix doigts (base dix)
- certaines civilisations (Mayas, Aztèques) comptaient sur leurs vingt doigts (mains et pieds).

Dans tous les cas, l'idée de base est de regrouper cailloux, encoches ou autres objets ou signes en tas faciles à dénombrer.

La base douze a sans doute un jour été introduite pour les mêmes raisons, comme la base six (huitres vendues par 12 et œufs vendus par six)

L'abaque ou le boulier

Le principe consiste à ranger les cailloux en colonnes dans des rainures, le nombre de cailloux par rainure dépendant de la base choisie.



Sur le boulier de droite, les unités sont placées en haut de la tige inférieure, les multiples de cinq en bas de la tige supérieure. Le nombre se lit donc au milieu du boulier. Chaque colonne peut représenter les nombres de 0 à 15 pour le report des retenues par multiples de 5.

Du comptage à l'écriture de nombres

Vers 3500 av. J.C., les Sumériens et les Elamites sont des peuples du Golfe persique en pleine expansion, ce qui les pousse à inventer l'écriture, notamment, pour les échanges commerciaux.

L'argile est un matériau à la fois abondant dans cette région et qui se prête bien au modelage puis durcit en séchant et se conserve très longtemps.

Après des boules contenant des jetons, on passe à des signes creusés dans l'argile sur la surface de boules puis de tablettes. C'est l'invention de l'écriture cunéiforme basée sur des clous et des chevrons.

1	┆	2	┆┆	3	┆┆┆	4	┆┆┆┆	5	┆┆┆┆┆
6	┆┆┆┆┆	7	┆┆┆┆┆┆	8	┆┆┆┆┆┆	9	┆┆┆┆┆┆┆	10	┆┆┆┆┆┆┆┆
11	┆┆┆┆┆┆┆┆	12	┆┆┆┆┆┆┆┆	13	┆┆┆┆┆┆┆┆	14	┆┆┆┆┆┆┆┆┆	15	┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆
16	┆┆┆┆┆┆┆┆┆	17	┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆	18	┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆	19	┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆	20	┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆

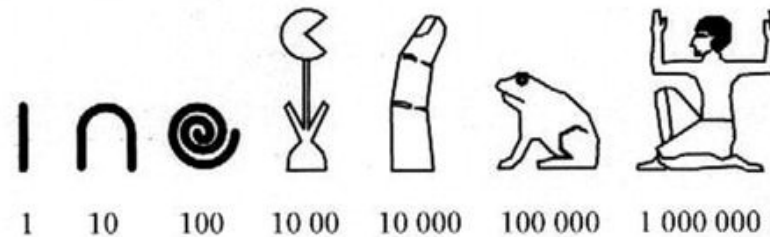
Systemes antiques de numération

Les Sumériens utilisaient un système de numération en base soixante, système positionnel. Cela signifie que le même symbole, par exemple un clou vertical, désignait aussi bien « un » que « soixante ». Tout dépendait de sa position dans l'écriture.

Problème : quelle lecture pour deux clous posés l'un à côté de l'autre ? Deux ou soixante et un ?

Idées : écartement plus ou moins grand, clous plus ou moins grands

En parallèle, vers 3000 av. J.C., les Égyptiens adoptent un système de numération à base dix non positionnel, chaque puissance de 10 (unité, dizaine, centaine...) possédant son signe propre.



Des entiers aux fractions ...

En –1800, les Babyloniens utilisent des fractions sexagésimales, à base d'inverses :

Le quotient $\frac{a}{b}$ est obtenu comme le produit $a \times \frac{1}{b}$. Et comme le clou désigne « un » comme « soixante » :

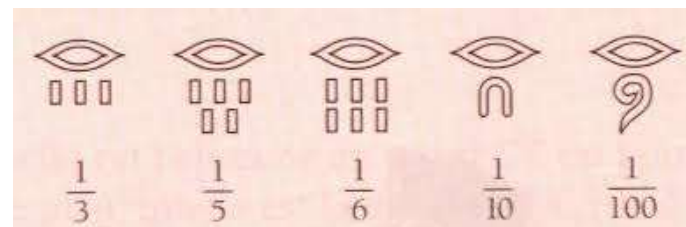
- l'inverse de « deux » s'écrit comme « trente » car $2 \times 30 = 60$;
- l'inverse de « neuf » s'écrit comme 6 (soixantaines) et 40 (unités) car $9(6 \times 60 + 40) = 3\,600$.

En Egypte, les fractions utilisées ont, sauf $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, pour dénominateur 1.

Le papyrus de Rhind (vers 1650 av J.C.) comporte quatre-vingt-quatre

problèmes résolus qui nécessitent des tables de décompositions de fractions en fractions égyptiennes.

Exemples : $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ et $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$



et aux irrationnels

La tablette babylonienne YBC 7289 représente un carré contenant des mesures du côté, de la diagonale et du rapport de ces deux mesures

Ce rapport correspond à 1, 24 ; 51 ; 10 et donc à la fraction sexagésimale $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$.

Il ne peut correspondre à une mesure.

On peut donc penser que les scribes étaient conscients que le carré de ce rapport valait 2.

Cette fraction constitue une bonne approximation du nombre $\sqrt{2}$.

En effet $0 \leq \sqrt{2} - \left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}\right) \leq 6 \times 10^{-7}$.



Les mathématiciens grecs et la géométrie

Au VI^e siècle av. J.C., les pythagoriciens placent le nombre entier à la base de toute connaissance et considèrent chaque segment comme une juxtaposition d'un nombre fini p (**entier**) de « monades » unités qui correspond à la longueur du segment. Un **rationnel** est $\frac{p}{q}$ est alors le quotient des longueurs p et q de deux segments.

Problème : l'un d'entre eux s'aperçoit que la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas *commensurable* ($\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel).

On ne sait alors pas nommer ces nombres (irrationnels) mais on les construit. Par exemple, \sqrt{n} pour $n \geq 5$, est construit comme longueur de l'hypoténuse d'un triangle dont les côtés de l'angle droit sont 1 et $\sqrt{n-1}$.

Au IV^e siècle av. J.C., Eudoxe définit un nombre comme « rapport de deux grandeurs de même nature » (longueurs, surfaces, volumes) et énonce un axiome : « étant donné deux grandeurs non nulles de même nature, il y a un multiple de l'une qui excède l'autre ».

Cet axiome est à la base de la construction de l'ensemble des nombres réels : le « caractère archimédien » de \mathbf{R} : pour tous nombres réels a et b strictement positifs, il existe un entier naturel n tel que $0 < a < nb$.

Algèbre et algorithmes: l'apport des savants arabes

Après plusieurs siècles d'âge noir des mathématiques et au début du IX^e siècle, le mathématicien arabe Al-Khwârizmî publie plusieurs ouvrages dont le *De numero indorum* ouvrage dans lequel il décrit le système de numération indien, système qui intègre le nombre zéro.

Son ouvrage *Liber algebrae et almucabola* change le point de vue des mathématiciens : on ne résout plus des problèmes arithmétiques (commerce) ou géométriques (écoles grecques) en posant des équations mais on part d'équations, chacune correspondant à une classe de problèmes. La notion de polynômes et de ses nombreuses propriétés est ainsi créée.

Les irrationnels algébriques sont alors étudiés comme racines d'équations polynômiales.

La langue arabe devient, jusqu'à la Renaissance, la langue scientifique. Le mot arabe *sifr* est la racine des mots chiffre et zéro.

Au X^e siècle, le syrien Al-Uqlidisi invente les fractions décimales et les nombres décimaux qui en découlent. Il perfectionne l'usage de la fraction décimale, utilisant un séparateur pour distinguer la partie entière de la partie décimale

Les chiffres arabo-indiens en Europe

Au XII^e siècle, de nombreux textes arabes ont été traduits en latin, notamment à Tolède et à Palerme par des savants grecs, arabes, italiens ou juifs.

L'un d'eux Léonard de Pise, surnommé Fibonacci, bouscule l'utilisation de l'abaque en publiant le *Liber abaci* dans lequel, il introduit les chiffres arabo-indiens qui permettent d'employer des algorithmes bien plus performants pour réaliser des additions et des multiplications.

Ce livre contient aussi la célèbre suite dont les premiers termes sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... qui correspond à la croissance d'une famille de lapins et qui s'avèrera avoir de nombreuses applications arithmétiques notamment.

Fibonacci publie un autre ouvrage le *Flos* dans lequel il étudie l'équation polynomiale du troisième degré $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Il prouve qu'il n'y a pas de solution pouvant s'exprimer à l'aide des « irrationnels » du livre X des *Éléments* d'Euclide (c'est-à-dire des racines carrées) et donne l'approximation sexagésimale 1,22 ; 7 ; 42 ; 33 ; 4 ; 40 de la solution positive (méthode perdue).

Il énonce aussi des égalités entre irrationnels comme $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250}$.

L'irrationnel qui était une mesure géométrique pour Euclide devient un nombre.

L'âge des grandes découvertes

En même temps que la découverte de l'Amérique, l'univers des nombres va s'agrandir avec des nombres négatifs et des nombres imaginaires.

À la fin du XIV^e siècle, à Bologne, c'est sans doute l'algébriste Scipion dal Ferro qui produit le premier une méthode purement algébrique pour trouver une solution de l'équation générale du troisième degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, équation qui avait déjà été étudiée au XI^e siècle comme la recherche d'une intersection entre une parabole et une hyperbole.

La découverte transmise seulement oralement sera cependant revendiquée en 1540 par Nicolo Fontana, dit Tartaglia puis publiée par Cardan en 1545 (après avoir promis à Tartaglia de garder la solution secrète) dans *l'Ars magna*.

Tartaglia y explique la résolution des équations du troisième degré et celles du quatrième degré. Cela entraîne l'introduction de racines carrées de nombres négatifs. Ceux-ci n'auront pas encore de vrais statuts.

Équation du troisième degré (1)

$$\text{Soit } x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}.$$

$$\text{Alors } x^3 = (a + \sqrt{b}) + 3 \left(\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \right)^2 \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} + 3 \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \left(\sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \right)^2 + (a - \sqrt{b})$$

$$\text{Soit } x^3 = 2a + 3 \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \left(\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \right)$$

$$\text{Soit } x^3 = 2a + 3 \sqrt{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} \times x$$

$$\text{Soit } x^3 = 2a + 3 \sqrt{a^2 - b} \times x.$$

On identifie cette équation à $x^3 + px + q = 0$ où $q = -2a$ et $p = -3\sqrt{a^2 - b}$

$$\text{soit } a = -\frac{q}{2} \text{ et } b = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}.$$

Une solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ est donc :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Équation du troisième degré (2)

Soit l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ où $a \neq 0$.

On commence par poser $z = x - h$. L'équation s'écrit alors :

$$a(z - h)^3 + b(z - h)^2 + c(z - h) + d = 0$$

$$\text{Soit } az^3 + (-3ah + b)z^2 + (3ah^2 - 2bh + c)z + (-ah^3 + bh^2 - ch + d) = 0.$$

En posant $h = \frac{b}{3a}$, on se ramène à l'équation du second degré $z^2 + pz + q = 0$

$$\text{où } p = \frac{3a^2 - 2bh + c}{a} = \frac{3ac - b^2}{a} \text{ et } q = \frac{-ah^3 + bh^2 - ch + d}{a} = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{a}.$$

Pour toute équation de degré trois il existe donc deux nombres p et q tels que résoudre cette équation revient à résoudre l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Nécessité de nouveaux nombres

Tout va bien si $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$ et $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$ sont positifs. Mais ce n'est pas toujours le cas.

Dans son traité *l'Algebra* publié seulement en 1572, l'italien Bombelli applique la formule de dal Ferro à l'équation $x^3 = 15x + 4$.

$$p = -15 \text{ et } q = -4 \text{ d'où } \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -\frac{3 \cdot 375}{27} + \frac{16}{4} = -125 + 4 = -121 \text{ et } -\frac{q}{2} = 2.$$

Il obtient comme solution $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Or $15 \times 4 + 4 = 64 = 4^3$. Il en déduit la relation troublante $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$ puisqu'elle fait intervenir racines carrées de nombres négatifs.

Il y a là déjà le problème des nombres négatifs qui ne sont pas encore reconnus. Il faudra attendre l'écossais *Colin Maclaurin* (1698 ; 1746) puis le suisse Leonhard Euler (1707 ; 1783) pour voir apparaître des axes aux coordonnées positives et négatives.

Il y a ensuite le problème de ces nouveaux nombres « imaginaires » pour lesquels il n'y a pas de relations d'ordre car $\sqrt{-1}$ ne peut être comparé à 0. Il faudra attendre deux siècles pour que les nombres complexes soient acceptés en tant que nombres.

Newton, Leibniz, Euler : de l'algèbre à l'analyse

Isaac Newton et Gottfried Leibniz découvrent à peu près en même temps le calcul différentiel, les notions de dérivation et d'intégration et les infiniment petits qui ne sont encore que des auxiliaires de calcul.

Pour Leibniz, deux surfaces peuvent avoir la même aire sans que leur différence soit « rien » (on dirait maintenant négligeable) ou encore un ensemble non vide peut être de mesure nulle.

Il introduit aussi des courbes *transcendantes* c'est-à-dire des courbes qui n'ont pas d'équation polynomiale et établit, à l'aide de leurs développements en série entières, le lien entre la fonction sinus et la fonction exponentielle :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \text{ et } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

En 1748, Leonhard Euler pose $i = \sqrt{-1}$ et définit, pour tout nombre complexe z , la notation $a + ib$ où a et b sont des réels et les égalités

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \text{ ce qui permet d'écrire } e^{i\theta} = -1.$$

D'Euler à Gauss : foison d'idées mais nécessité de structures

De la formule $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ obtenue à partir de la somme des termes d'une suite géométrique de raison comprise strictement entre et 1, Euler s'autorise à y remplacer x par -1 puis par 2 :

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ et $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = -1$.

En 1799, Carl-Friedrich Gauss fait une construction géométrique rigoureuse des nombres complexes et il démontre le théorème : « tout polynôme $P(z)$ non constant à coefficients dans l'ensemble des nombres complexes admet au moins une racine dans cet ensemble ». Il s'appuie sur une notion de *continuité* (on ne peut passer d'un côté d'une courbe continue à l'autre côté sans traverser cette courbe) en transformant l'équation $P(z) = 0$ en un système d'équations de deux courbes $\begin{cases} Q(x, y) = 0 \\ R(x, y) = 0 \end{cases}$. Mais cette démonstration repose sur une notion encore floue du continu.

Tout cela montre la nécessité de bâtir des définitions pour les objets mathématiques manipulés depuis déjà plusieurs siècles comme les nombres réels, les nombres complexes, le continu, l'infini...

Constructions des nombres réels

Au 19^e siècle, la révolution industrielle est en marche et les mathématiciens s'autorisent à introduire de nouveaux objets mathématiques à condition de respecter une certaine cohérence et les chercheurs, qui enseignent en même temps, s'efforcent de baser leurs cours sur des axiomatiques.

Deux constructions, à partir de l'ensemble des rationnels de l'ensemble des réels, constructions qui ne seront complètes que plus tard, notamment grâce à Georg Cantor et son travail sur l'infini. Mais ces constructions sont enseignées maintenant en post-bac :

- à l'aide des suites de Cauchy de nombres rationnels (cours d'analyse de Louis-Augustin Cauchy en 1821 à l'École Polytechnique) ;
- à l'aide des *coupures* de Dedekind (cours de Richard Dedekind, lève de Gauss, en 1858 à l'institut Polytechnique de Zurich).

Coupures et nombres réels

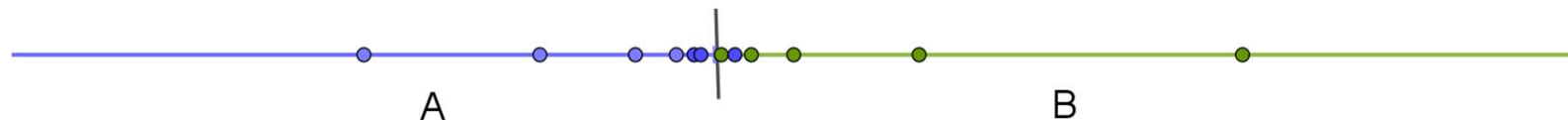
Dedekind part de l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels, de ses deux opérations (addition et multiplication) et de sa relation d'ordre. Il s'appuie sur la droite numérique restreinte aux rationnels.



Pour un rationnel donné r , il établit le nombre r comme la « frontière » entre l'ensemble A de tous les rationnels inférieurs strictement à r et l'ensemble B de tous les rationnels supérieurs ou égaux à r .

Dedekind considère alors toutes les *partitions* de \mathbf{Q} en deux sous ensembles A et B tels que tout élément de A est plus petit que tout élément de B et affirme qu'alors la borne inférieure de B est égale à la borne supérieure de A , ce qui définit à chaque fois un nombre.

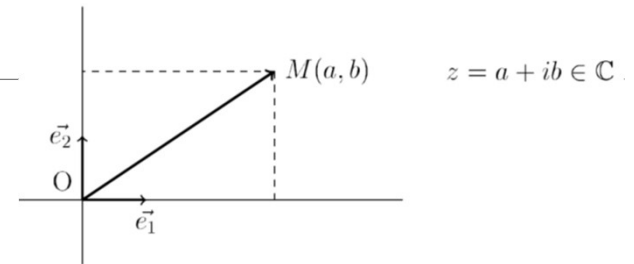
On peut visualiser cette coupure à l'aide de deux suites adjacentes de nombres rationnels, l'une croissante dans A l'autre décroissante dans B .



Par exemple, pour $\sqrt{2}$, il définit la partition $A = \{r \in \mathbf{Q}; r < 0 \text{ ou } r^2 < 2\}$ et $B = \{r \in \mathbf{Q}; r > 0 \text{ et } r^2 > 2\}$.

Constructions des nombres complexes

- Gauss interprète géométriquement les nombres complexes en associant au point du plan de coordonnées (a, b) le nombre complexe $a + ib$.



- Hamilton considère l'ensemble des couples (a, b) de réels et définit, sur cet ensemble, une addition et une multiplication :
 $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.
 On peut alors écrire $(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \times (b, 0)$ qui deviendra $a + ib$.

On retrouve en particulier :

- les couples $(a, 0)$ correspondent aux réels ;
- $(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$, ce qui correspond à $i^2 = -1$.

- On peut aussi définir les nombres complexes comme les matrices réelles $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ce qui justifie mieux les opérations, notamment l'expression de la multiplication :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}.$$

Les réels sont les matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ensembles de nombres et leur structure (1)

- **N** : ensemble des entiers naturels

On y a défini une addition et une multiplication toutes deux *commutatives* et *associatives* : pour tous entiers a, b, c , $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Le 0 est élément *neutre* pour l'addition : pour tout entier a , $a + 0 = 0 + a = a$

Le 1 est élément *neutre* pour la multiplication : pour tout entier a , $a \times 1 = 1 \times a = a$.

La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition : pour tous entiers a, b, c , $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Problème : pas de *symétrie* pour l'addition (pas d'entier naturel a' tel que $a + a' = a' + a = 0$).

- **Z** : ensemble des entiers relatifs

On y introduit, pour l'addition, le symétrique a' de tout entier a , défini par $a + a' = a' + a = 0$.

On le note $-a$. On le nomme *opposé* de a .

On dit alors que **Z** muni de l'addition a une structure de *groupe commutatif*.

Problème : pas de symétrie pour la multiplication.

Ensembles de nombres et leur structure (2)

- \mathbf{Q} : ensemble des nombres rationnels

On y introduit, pour la multiplication, le symétrique a' de tout entier a non nul, défini par

$a \times a' = a' \times a = 1$. On le note $\frac{1}{a}$. On le nomme *inverse* de a .

On dit alors que \mathbf{Q} muni de l'addition et de la multiplication a une structure de *corps* :

- $(\mathbf{Q}, +)$ est un groupe commutatif ;
- (\mathbf{Q}^*, \times) est un groupe commutatif ;
- \times est distributive par rapport à $+$.

Problème : pas de « continu » dans \mathbf{Q}

- \mathbf{R} : ensemble des nombres réels

Quelle que soit la construction de \mathbf{R} , on étend à \mathbf{R} les opérations définies sur \mathbf{Q} . Elles y conservent les mêmes propriétés algébriques.

$(\mathbf{R}, +, \times)$ est donc un corps commutatif.

Problème : les équations polynomiales n'ont pas toujours une solution dans \mathbf{R} .

Ensembles de nombres et leur structure (3)

- \mathbf{C} : ensemble des nombres complexes

Quelle que soit la construction de \mathbf{C} , on étend à \mathbf{C} les opérations définies sur \mathbf{R} . Elles y conservent les mêmes propriétés algébriques.

$(\mathbf{C}, +, \times)$ est donc un corps commutatif.

L'élément neutre pour l'addition est le réel 0 et l'opposé de $z = a + ib$ est $z' = a - ib$.

L'élément neutre pour la multiplication est le réel 1 et l'inverse de $z = a + ib$, si $z \neq 0$, est

$$z' = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}.$$

En revanche, si les ensembles \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} et \mathbf{R} étaient totalement ordonnés (dans ces ensembles, on peut toujours comparer deux nombres), il n'y a pas de relation d'ordre total dans \mathbf{C} .

Quaternions

Les quaternions furent « découverts » par Hamilton en 1843. Partant des nombres complexes représentés par des points du plan (de dimension 2), il cherche à définir une opération dans un espace de dimension trois et n'y arrive pas. Sur les rives de Royal Canal à Dublin, il a l'idée de se placer en dimension 4 avec trois nombres jouant le rôle du i des nombres complexes.

Il considère les nombres i, j, k qui vérifient $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (*)

et définit un quaternion comme un nombre qui peut s'écrire $q = a + bi + cj + dk$, où a, b, c, d sont des nombres réels.

L'ensemble \mathbf{H} des quaternions est muni de l'extension des opérations sur \mathbf{R} et des égalités (*).

$(\mathbf{H}, +, \times)$ a alors une structure de corps mais ce corps **n'est pas commutatif** :

par exemple $ij = ij(-k^2) = -(ijk)k = k$

et $(ji)(ij) = j(i^2)j = j(-1)j = -j^2 = 1$ donc ji est l'inverse de ij . Or $ij(-k) = -ijk = 1$ donc k est aussi l'inverse de ji . Donc $ji = -k$.

Formule dite magique

La formule d'Euler peut être rendue encore plus « magique » en l'écrivant :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

0 élément neutre de l'addition

1 élément neutre de la multiplication

π nombre transcendant

i nombre imaginaire à la base des nombres complexes

e désignant à la fois la fonction exponentielle et le nombre dont le logarithme vaut 1.