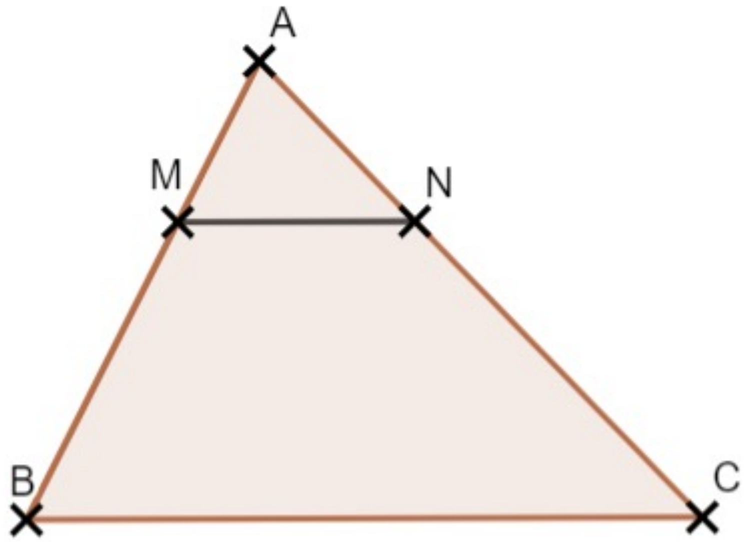
Une démonstration du théorème de Thalès au collège par les aires

Le théorème de Thalès démontré en cycle 4: la configuration des triangles emboîtés



Soit ABC un triangle.

M est un point du segment [AB] et N un point du segment [AC].

Si (MN) et (BC) sont parallèles

alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Démonstration du théorème de Thalès

Les élèves ont déjà rencontré l’énoncé du théorème.

L’objectif est de leur permettre de le démontrer, avec un peu d’aide, selon la méthode d’Euclide (Proposition 2 du livre VI des Eléments).

Pour cela, il est nécessaire que les élèves disposent de deux résultats préliminaires afin d’alléger la charge mentale lors de la démonstration.

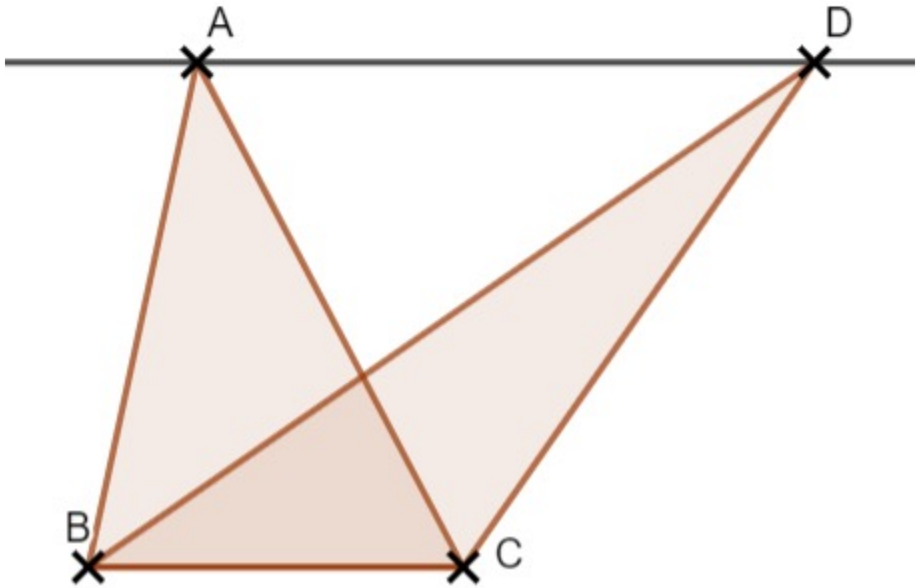
La démonstration s’appuie sur les deux résultats suivants:

- **le lemme de la parallèle qui fournit une égalité d’aires**

  (proposition 37 du livre I d’Euclide)

- **le lemme des proportions qui permet de relier les rapports d’aires et les rapports de longueurs** (proposition 1 du livre VI d’Euclide)

Le lemme de la parallèle



Soient ABC et DBC deux triangles de même base [BC] dont les sommets sont sur une parallèle à (BC)

Alors les deux triangles ont la même aire.

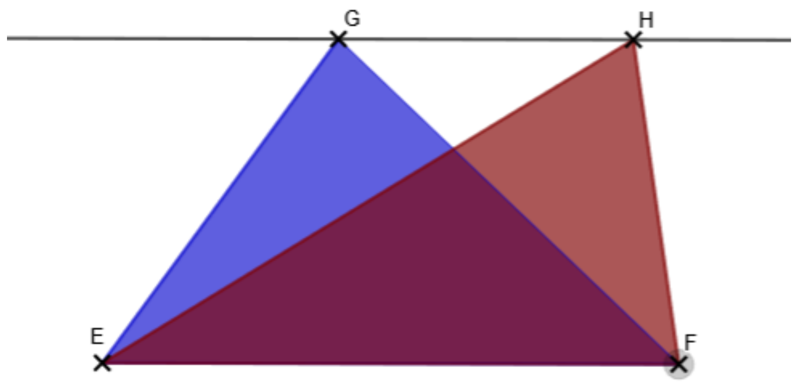
Le lemme de la parallèle avec les élèves

1. **Manipulation**
   - Créer un triangle EFG.
   - Créer la parallèle à (EF) passant par G. Placer un point H sur cette parallèle.
   - Créer le triangle EHF.
   - Afficher les aires des triangles EFG et EFH.
2. **Observation et expression**

Que peut-on constater ?

- Déplacer le point H.
- Cette constatation est-t-elle toujours vraie ?

Quelle conjecture peut-on faire ?



3. Démonstration

Démontrer la conjecture

4. Bilan

Enoncer le résultat que l’on vient de découvrir et de prouver.

Réponses de Raphael

A. 4/ Les aires de EFG et de EFH sont égales

5/ La conjecture semblent vrai

6/ Les aires des triangles EFG et EFH sont toujours égal

B. L'aire de EFG sera toujours égale à celle de EFH car la base des triangles est là même (EF) et leur hauteu aussi car G et H sont sur la même droite parallèle À la base, ainsi, un segment [GA] perpendiculaire à (EF) et un segment [HB] perpendiculaire à (EF) ont la même distance

(pour A et B $\in$ à (EF))

L’énoncé du résultat: une étape difficile pour les élèves

BILAN : Enoncer le premier résultat que l’on vient de découvrir et de prouver.

On a remarqué que EFG et EFH ont la même aire quel que soit la position de H car ils ont la même aire. (même base et hauteur)

BILAN : Si 2 triangles sont entre 2 parallèles et que tout leurs sommets sont sur les parallèles, alors les 2 triangles ont la même.

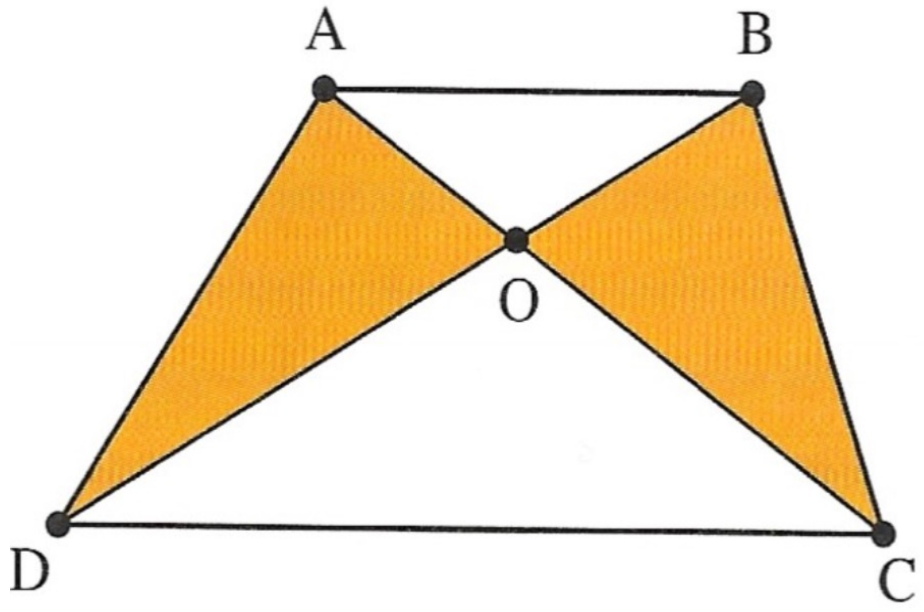
Bilan :

Quand 2 triangles ont ~~...~~ la même base et leur sommet sur une parallèle à cette base alors ils ont le même aire.

Réactivation du lemme de la parallèle
Le théorème du papillon

ABCD est un trapèze. Ses diagonales se coupent en O.

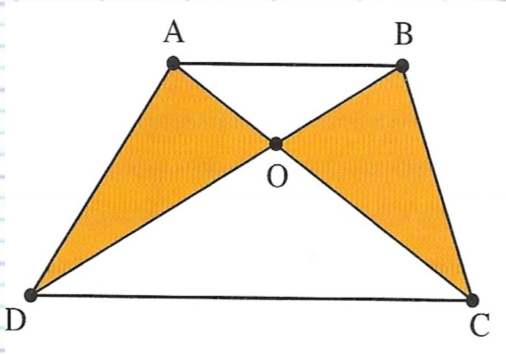
a) Comparer les aires des triangles ADC et BCD. Justifier la réponse.
b) Exprimer les aires des triangles AOD et BOC sous forme d'une différence d'aires.
c) Déduire de cette expression que les triangles AOD et BOC ont même aire.



Le théorème du papillon: preuve d'un élève

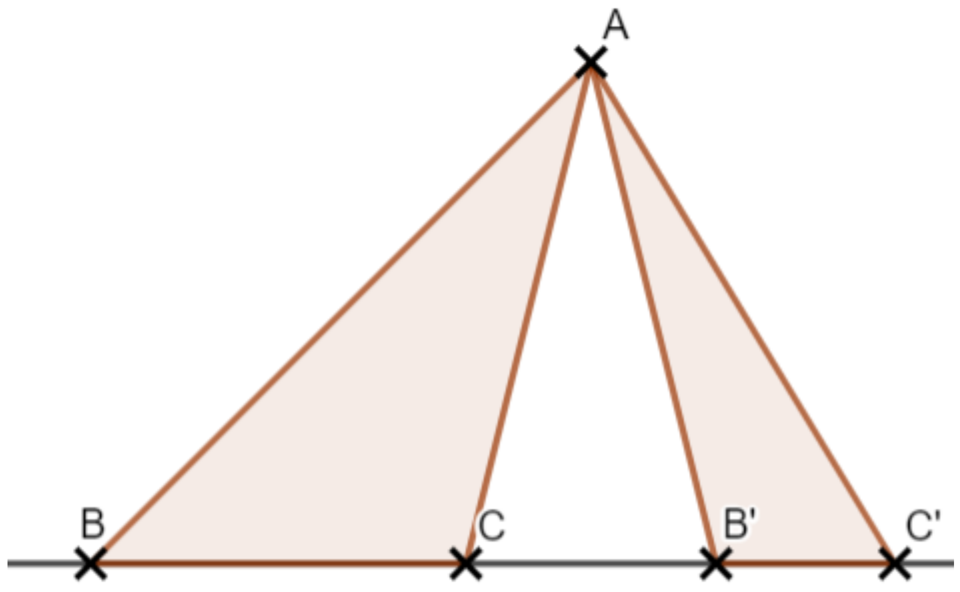
a. Dans le trapèze ABCD, (AB) et (DC) sont parallèles.
~~La~~ Les triangles ADC et BCD ont la même base ainsi que la même hauteur ; leurs aires seront égales.

b. AOD = ADC − ODC
BOC = BDC − OCD



c. Les triangles ADC et BDC ont la même aire. On soustrait aux triangles ADC et BDC le même triangle ODC. Les triangles AOD et BOC ont donc la même aire

Le lemme des proportions



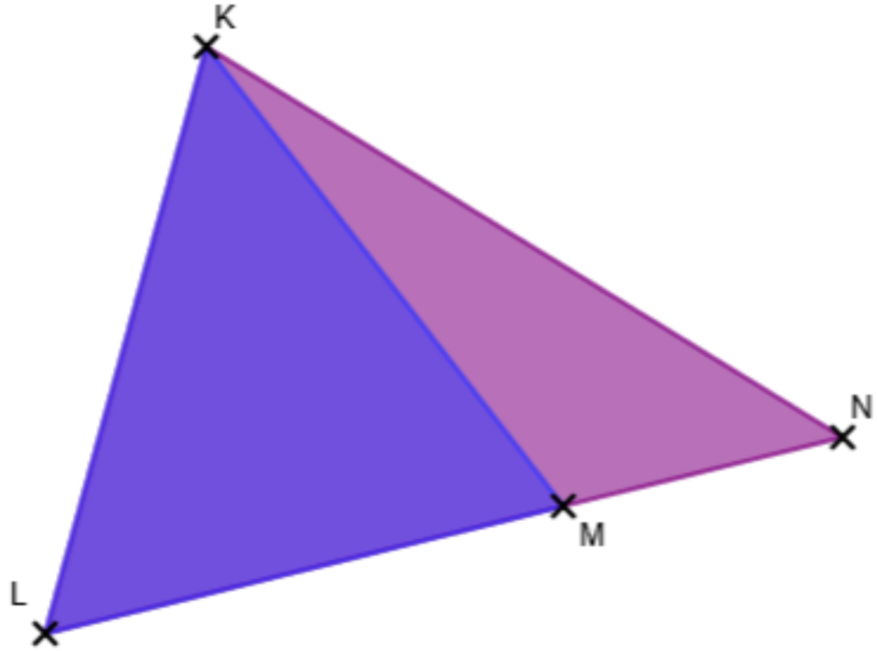
Soient ABC et AB’C’ deux triangles ayant en commun le sommet A et dont les côtés [BC] et [B’C’] sont portés par la même droite.

Le rapport des aires de ABC et de AB’C’ est égal au rapport des longueurs BC et B’C’.

Le lemme des proportions avec les élèves

On considère la figure ci-contre.

Démontrer que $\dfrac{aire\ de\ KLM}{aire\ de\ KLN} = \dfrac{LM}{LN}$

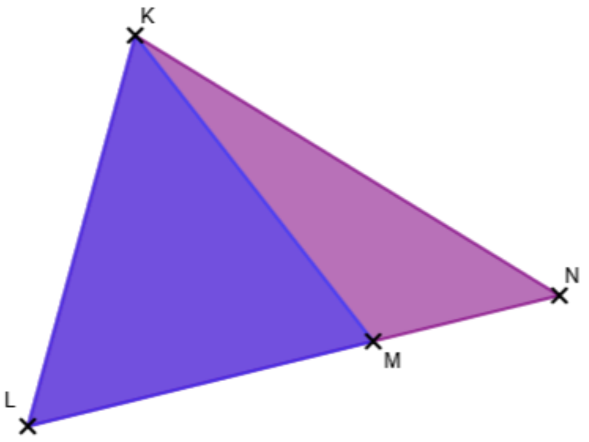


Le lemme des proportions: la preuve d'un élève

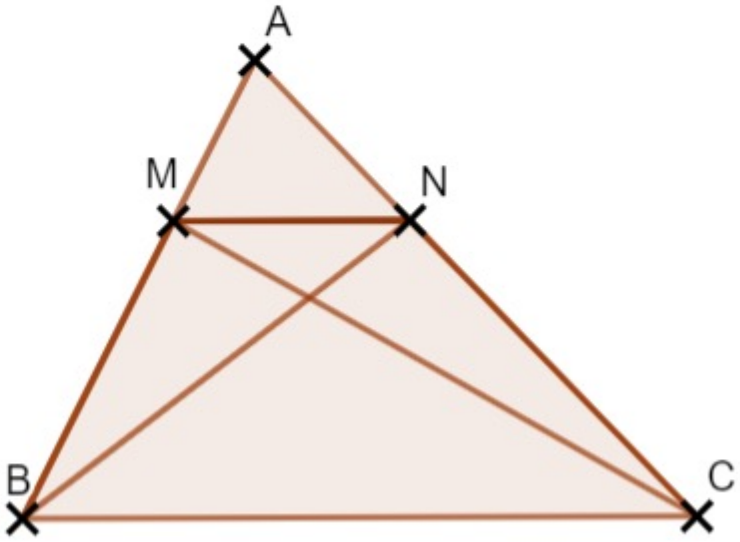
$$\frac{\left(\frac{LM \times k}{2}\right)}{\left(\frac{LN \times k}{2}\right)} = \frac{LM}{LN}$$

$$\frac{LM}{LN} = \frac{LM}{LN}$$

Si l'on a deux triangles de même hauteur, le quotient des aires des deux triangles est égal à celui des deux bases.



La démonstration du théorème de Thalès



On suppose que (MN) et (BC) sont parallèles

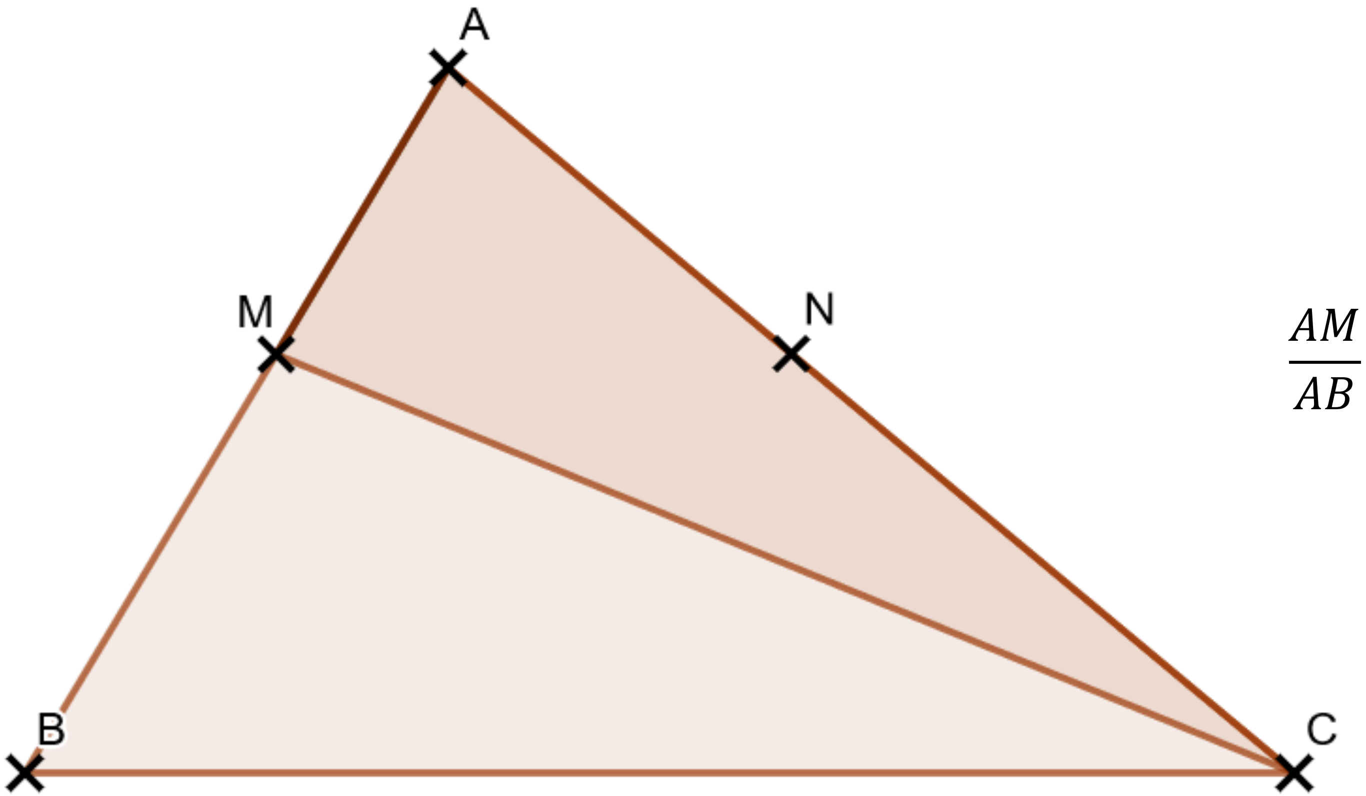
On veut prouver que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

La démonstration du théorème de Thalès
Stratégie

On a des rapports de longueurs à comparer, on va les transformer en rapports d'aires grâce au lemme des proportions.

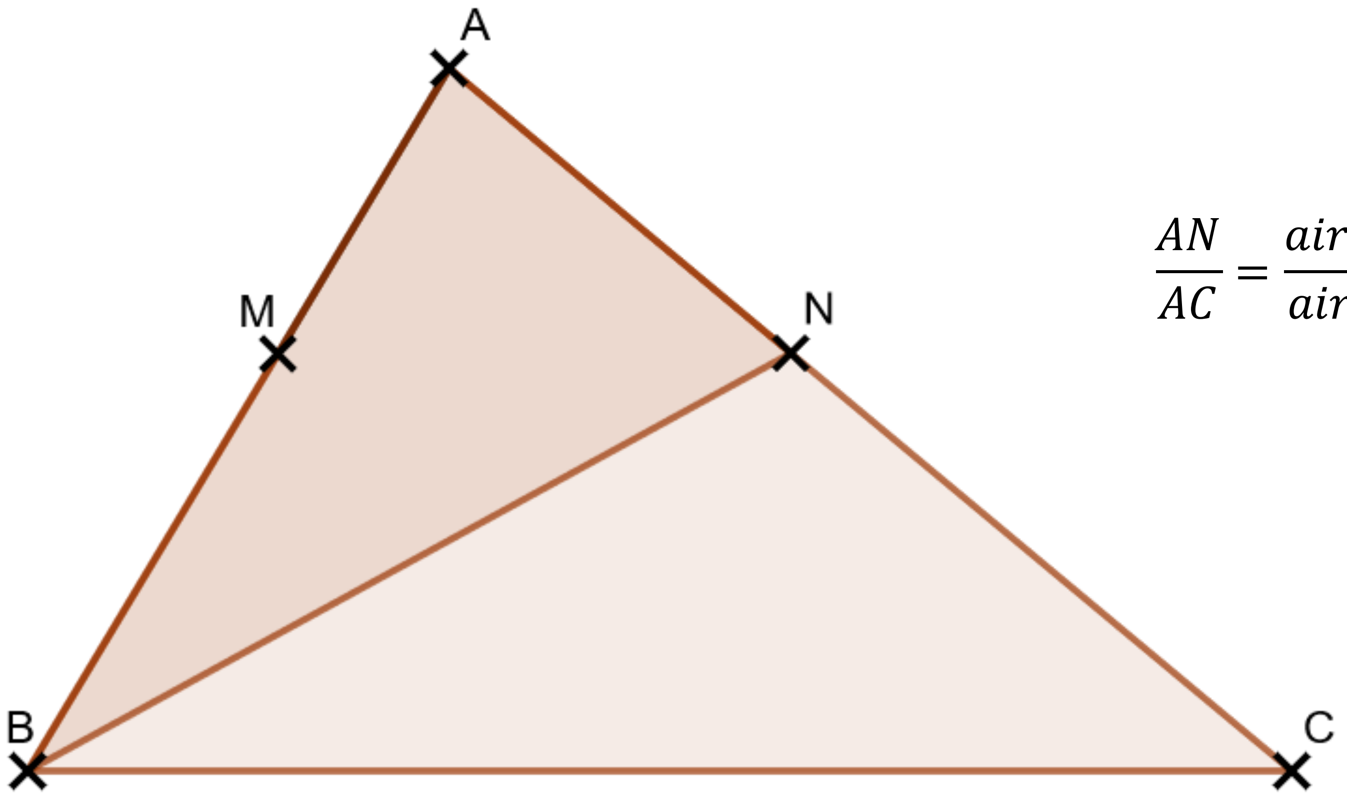
Pour transformer ces rapports de longueurs en rapport d'aires grâce au lemme des proportions, il suffit de considérer un point qui sera le sommet de deux triangles dont chacun des segments est une base.

Etape 1



$$\frac{AM}{AB} = \frac{aire\ AMC}{aire\ ABC}\ (point\ C)$$

Etape 2

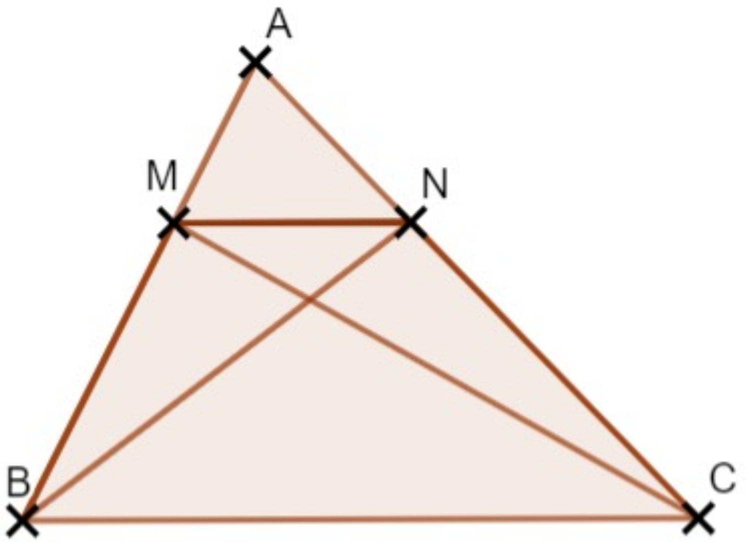


$$\frac{AN}{AC} = \frac{aire\ ANB}{aire\ ACB} \quad (point\ B)$$

Etape 3: comparaison des rapports d'aires

On s'est arrangé pour que la même aire intervienne au dénominateur. On compare

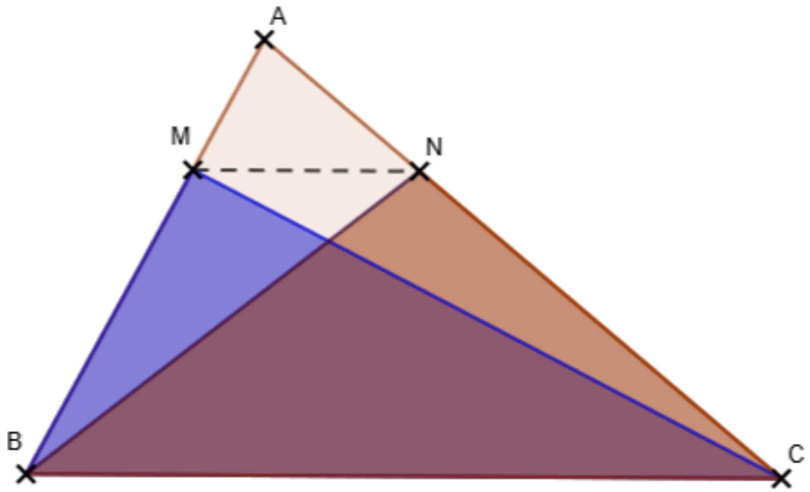
$\frac{aire\ AMC}{aire\ ABC}$ et $\frac{aire\ ANB}{aire\ ACB}$ ce qui revient à comparer l'aire de ACM et l'aire de ABN :



Par addition:	Par soustraction:
$aire\ AMC = aire\ MNC + aire\ AMN$ $aire\ ANB = aire\ MNB + aire\ AMN$ **Or $\boldsymbol{aire\ MNB = aire\ MNC}$** **(lemme du trapèze)** Donc $aire\ AMC = aire\ ANB$	$aire\ AMC = aire\ ABC - aire\ MBC$ $aire\ ANB = aire\ ABC - aire\ NBC$ **Or $\boldsymbol{aire\ MBC = aire\ NBC}$** **(lemme du trapèze)** Donc $aire\ AMC = aire\ ANB$

Proposition de démonstration pour les élèves

M est un point du segment [AB], N est un point du segment [AC] et la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).



1. En utilisant le lemme de la parallèle, quelles aires de triangles sont égales ? En déduire que les triangles AMC et ANB ont la même aire.
2. En utilisant le lemme des proportions ,

   a) Exprimer $\frac{aire\ AMC}{aire\ ABC}$ comme un rapport de longueurs.

   b) Exprimer $\frac{aire\ ANB}{aire\ ABC}$ comme un rapport de longueurs.

3. En utilisant les questions 1 et 2, montrer que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

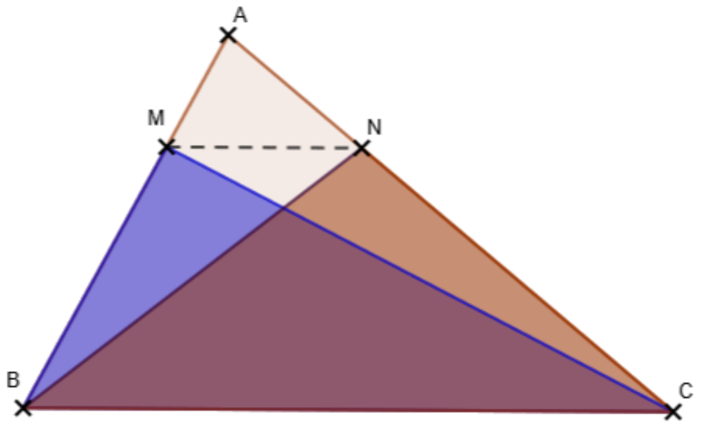
Démonstration de Thalès par un élève

1. NBC et MBC ainsi que MNB et MN
ont des aires egales.
AMC et ANB font la même aire car
MNB + AMN = MNC + AMN

2. a) $\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$

b) $\frac{A_{ANB}}{A_{ABC}} = \frac{AN}{AC}$

c) comme AMC est égal à ANB alors
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



Conclusion

- La méthode des aires permet de démontrer un résultat important du cours conformément au BO.
- Cette démonstration est accessible aux élèves car elle devient très visuelle à condition d'avoir rendus disponibles les résultats préliminaires.
- Ce travail sur les aires peut être préparé dès le cycle 3.