Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°1

Propriété géométrique d'une famille de courbes

À tout nombre réel positif a, on associe la fonction f_a définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_a(x) = x(\ln x - a).$$

On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O.

1. À l'aide d'un logiciel, représenter la courbe $\mathcal{C}_0$. Représenter une des courbes $\mathcal{C}_a$ et faire varier le paramètre a

> Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

2. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$. Faire figurer sur le graphique les points S_0 et S_a, points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_a$ respectivement avec la droite $\mathcal{D}$. Quels rôle semblent jouer les ordonnées des points S_0 et S_a pour les fonctions f_0 et f_a ?

3. On note E_0 et E_a les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_a$ respectivement avec l'axe des abscisses. Par quelle transformation géométrique simple le triangle OS_aE_a semble-t-il être l'image du triangle OS_0E_0 ?

> Appeler le professeur pour lui exposer cette conjecture

4. Calculer les coordonnées des points S_0 et S_a, puis celles des points E_0 et E_a. Que conclure quant aux conjectures précédentes ?

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°2

Méthode des rectangles

On considère la fonction f, définie sur [0, 1] par :

$$f(x) = x^2 e^{1-x^2}.$$

On se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

1. Représenter la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Comment peut-on interpréter graphiquement I ? Quel semble être le sens de variation de la fonction f ?

Appeler le professeur pour lui soumettre cette réalisation et cet avis

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
À l'aide d'un logiciel adapté, faire le calcul de S_{100} et T_{100}. En déduire un encadrement de I. Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

Appeler le professeur pour lui soumettre ces calculs

3. Déterminer le sens de variation de f.

4. Comment peut-on obtenir un encadrement de I d'amplitude 10^{-3} ?

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°3

Tangentes communes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.On considère les courbes $\mathcal{C}$ et Γ représentant respectivement les fonctions *f* et *g* définies sur **R** par :

$$f\left(x\right)=\ln x \text{ et } g\left(x\right)=x^2.$$

On se propose d'étudier le nombre de tangentes communes à ces deux courbes.

1. Représenter les courbes $\mathcal{C}$ et Γ. Placer sur la courbe $\mathcal{C}$ un point A d'abscisse *a*. Estimer graphiquement le nombre de points d'intersection de la tangente $\mathcal{T}$ en A à la courbe $\mathcal{C}$ avec la courbe Γ.

2. Combien les courbes $\mathcal{C}$ et Γ semblent-elles avoir de tangentes communes ? Pour quelles valeurs de *a* cette situation se réalise-t-elle ?

Appeler le professeur pour lui soumettre ces estimations

3. Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point A d'abscisse *a* à la courbe $\mathcal{C}$. Écrire ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que cette droite ne possède qu'un point d'intersection avec la courbe Γ.

Appeler le professeur pour discuter cette condition

4. Sur le graphique, représenter graphiquement la fonction *h* définie sur **R*** par :
$$h\left(x\right)=1-\frac{1}{4x^2}.$$
5. Quels sont les points d'intersection de la courbe représentative de la fonction *h* avec la courbe $\mathcal{C}$? Comparer avec l'estimation faite à la question 2.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°4

Carré animé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B de coordonnées respectives $(4,0)$ et $(0,4)$.

On considère un point P appartenant au segment $[OA]$ et le point R du segment $[OB]$ tel que $OP+OR=4$ et on construit le carré PQRS de sens direct.

1. Construire la figure.
2. Comment semblent évoluer les positions de Q et S lorsque P varie sur le segment $[OA]$?

> Appeler le professeur pour lui montrer la construction, l'animation, et lui soumettre ces conjectures

3. Construire une nouvelle figure sur laquelle apparaissent les points A, B, P, R et le milieu M de $[AB]$. Comparer les triangles MBR et MOP. Mesurer l'angle $\widehat{RMP}$. Prouver le résultat observé et conclure que $Q=M$.

> Appeler le professeur pour discuter cette conclusion.

4. On appelle Ω le centre du carré PQRS. Quelle est l'image du segment $[OA]$ par l'application qui à tout point P de $[OA]$ associe le point Ω ? En déduire l'image du segment $[OA]$ par l'application qui à tout point P de $[OA]$ associe le point S.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°5 (spé)

Restes chinois

On examine ici un cas particulier d'un théorème connu dans la littérature mathématique sous le nom de Théorème des restes chinois.

Un enfant dispose d'un certain nombre *n* de jetons. S'il les range selon trois lignes identiques, il lui reste 2 jetons. S'il les range selon 5 lignes identiques, il lui en reste 3. S'il les range selon 7 lignes identiques, il lui en reste 2.

1. Déterminer les restes dans les divisions euclidiennes par 3, par 5 et par 7 des entiers naturels inférieurs ou égaux à 1 000.

> Appeler le professeur, lui montrer le travail réalisé

2. Quels entiers inférieurs ou égaux à 1 000 vérifient les conditions exposées ? Plus généralement, émettre une conjecture sur l'ensemble des entiers *n* vérifiant :

$$(S)\begin{cases} n \equiv 2 \ (\text{mod}.3) \\ n \equiv 3 \ (\text{mod}.5) \\ n \equiv 2 \ (\text{mod}.7) \end{cases}$$

> Appeler le professeur pour discuter cette conjecture
> et envisager les moyens d'aborder la suite du problème.

3. Vérifier que l'idée émise en 2. fournit bien des solutions du système (S).
4. Montrer dans une première étape que pour tout entier *n* solution du système (S) il existe des entiers *p* et *q* tels que $\begin{cases} n = 21p + 2 \\ n = 5q + 3 \end{cases}$. Expliquer ensuite au professeur comment on conclut.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°6

Calcul approché d'une intégrale par une méthode de Monte-Carlo

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{x-1}$. Représenter la fonction f puis calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Représenter la portion de plan D dont cette intégrale mesure l'aire.

> Appeler le professeur pour vérifier ces points de départ

1. On se propose de déterminer une valeur approchée de I en estimant l'aire de D par une méthode de tirage aléatoire. Cette méthode consiste à estimer, parmi n couples de nombres réels tirés selon la loi équirépartie sur $[0,1]\times[0,1]$ la proportion de ceux qui sont les coordonnées de points de D. Effectuer ce tirage pour n = 1 000.

2. Donner la valeur obtenue par cette méthode pour l'aire de D.

> Appeler le professeur pour discuter cette conclusion.

3. Faire 10 fois les 1 000 tirages précédents. Expliquer les variations dans les résultats obtenus.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°7

Voir dans l'espace

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A de coordonnées $\left(1,0,2\right)$, B de coordonnées $\left(-1,1,1\right)$, C de coordonnées $\left(1,1,3\right)$, D de coordonnées $\left(3,0,4\right)$ et E de coordonnées $\left(5,2,2\right)$. Placer ces cinq points sur une figure.

1. Pour chacune des affirmations suivantes, effectuer avec le logiciel une manipulation permettant d'estimer qu'elle est VRAIE ou FAUSSE :

a. Les points A, B et C sont alignés ;
b. Le triangle BDE est rectangle ;
c. Le triangle BDE est isocèle ;
d. Le point D est l'isobarycentre de A, B et C ;
e. Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

Appeler le professeur. Discuter avec la figure
le traitement des questions

2. Examiner de même cette nouvelle suite d'affirmations :

a. Le projeté orthogonal du point B sur le plan (ADE) est le point D ;
b. La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC) ;
c. La droite (AD) est orthogonale au plan (BDE) ;

3. On considère la sphère (S) de centre E et de rayon $2\sqrt{3}$. Discuter ces affirmations :

a. La sphère (S) est tangente au plan (ABC) ;
b. La sphère (S) passe par le point A ;
c. L'intersection de la sphère (S) et du plan (ABC) est l'ensemble vide.

Appeler le professeur pour examiner ces affirmations.

4. Établir, par le raisonnement et le calcul, les réponses apportées à la question 1.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°8

Approximation d'une solution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = -2xy,$$

dont l'inconnue est une fonction définie sur $\mathbf{R}^+$. On s'intéresse à la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 1$.

1. Approximation de la pente de la corde par le nombre dérivé à l'origine (méthode d'Euler)

On se donne un pas h et la suite (x_n) de réels définie par $x_0 = 0$ et, pour tout n, $x_{n+1} = x_n + h$. La suite (y_n) est définie par $y_0 = 0$ et, pour tout n, $y_{n+1} = y_n - 2x_n y_n h$.

Dresser le tableau des couples (x_n, y_n) dans le cas $h = 0{,}1$, pour $n \leqslant 50$. Représenter les points correspondants sur un graphique.

Appeler le professeur pour lui exposer la méthode et les résultats

2. Approximation de la pente de la corde par le nombre dérivé à l'extrémité

La suite (x_n) est définie comme en 1., mais la suite (y_n) l'est maintenant par $y_0 = 0$ et, pour tout n, $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 + 2x_n h}$. Dresser le tableau des couples (x_n, y_n) dans le cas $h = 0{,}1$, pour $n \leqslant 50$. Représenter les points correspondants sur le graphique.

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbf{R}^+$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ est solution de l'équation (E).
4. Compléter le graphique précédent avec les couples $(x_n, g(x_n))$. Justifier les définitions utilisées pour les y_{n+1}. Comparer les méthodes utilisées.

Appeler le professeur pour lui montrer ce bilan.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°9

Lieu géométrique dans l'espace

On considère un tétraèdre ABCD, le milieu I du segment $[\mathrm{AB}]$, le milieu J du segment $[\mathrm{CD}]$ et le point L tel que ICJL soit un parallélogramme.

Soit m un réel non nul et G_m le barycentre du système $\{(\mathrm{A}, 1), (\mathrm{B}, 1), (\mathrm{C}, m-2), (\mathrm{D}, m)\}$.

1. Réaliser une figure.

a. Où semble se trouver le point G_2 ?

b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $\mathrm{L} = \mathrm{G}_m$?

c. Quel semble être le lieu du point G_m lorsque m décrit $\mathbf{R}^*$?

> Appeler le professeur pour lui montrer la figure
> et lui soumettre ces conjectures

d. Comparer les longueurs JL et JG_m. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{JG}_m}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JL}}$ semblent-ils colinéaires ?
Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $\mathrm{J} = \mathrm{G}_m$?

2. Établir, si possible, par le calcul, une relation de colinéarité entre $\overrightarrow{\mathrm{JG}_m}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JL}}$. Quel est finalement le lieu du point G_m ?

> Appeler le professeur pour lui montrer ce bilan.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°10

Courbes tangentes

Les courbes représentatives de deux fonctions *f* et *g*, dans le même repère du plan, sont dites *tangentes* si elles possèdent la même tangente en un point, autrement dit s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = g(x_0)$ et $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Un réel *a* étant donné, on veut savoir si les courbes représentatives des fonctions *f* et *g*, définies sur **R** respectivement par $f(x) = \sin x$ et par $g(x) = x^2 + a$, sont tangentes.

1. Représenter ces deux fonctions et faire varier *a*. Pour quelles valeurs de *a* les courbes semblent-elles tangentes ? Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

Appeler le professeur pour lui montrer les courbes et le résultat

2. Estimer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\cos x = 2x$ et des valeurs approchées de ces solutions. Comparer avec les résultats obtenus en 1.
3. Montrer qu'une condition nécessaire pour que les deux courbes soient tangentes en leur point d'abscisse x est : $x^2 = \sqrt{4a+5} - (a+2)$ Laquelle des deux estimations s'approche-t-elle le plus de ce résultat ?

Appeler le professeur pour lui montrer ce bilan.

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°11

Avec un rectangle et des triangles équilatéraux

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OPMQ de sens direct et les points R et S tels que les triangles PRM et MSQ soient équilatéraux de sens direct.

1. Faire la figure. Sur cette figure, faire varier le point M sur la perpendiculaire à (OP) passant par P et observer le triangle ORS et son centre de gravité G.

2. Quelles conjectures peut-on émettre sur la nature du triangle ORS et le lieu de G ? Quelles premières vérifications peut-on obtenir avec les ressources offertes par le logiciel ?

> Appeler le professeur, lui montrer la figure
> et lui soumettre ces manipulations

3. On construit de même des triangles équilatéraux OQT et POU. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère RSTU soit un carré.

> Appeler le professeur pour lui soumettre cette condition

4. Indiquer les démarches permettant de prouver les assertions précédentes.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°12 spé

Une moulinette à nombres entiers

À tout entier naturel P inférieur à 1 000 on associe le triplet (a, b, c) de ses chiffres (par dérogation aux conventions ordinaires, a peut être nul, et dans le cas où il l'est, b peut l'être aussi). On considère ensuite les nombres M et N qui s'écrivent avec les mêmes chiffres, utilisés respectivement dans l'ordre décroissant et dans l'ordre croissant. On effectue enfin la différence M – N, qui fournit l'image P_1 du nombre P.

Exemples : pour P = 574, on obtient M = 754, N = 457 et P_1 = 297, pour P = 454, on obtient M = 544, N = 445 et P_1 = 99.

1. Réaliser un programme ou écrire sur une feuille de calcul les instructions permettant d'obtenir l'image P_1 de tout entier P inférieur à 1 000

> Appeler le professeur pour vérifier ce programme
> ou cette feuille de calcul

2. Observer les images, puis les images successives, de quelques entiers. Quelle remarque peut-on faire sur les chiffres des nombres P_1 ? À quelle issue semblent conduire les itérations successives ?

> Appeler le professeur pour lui exposer cette conjecture

3. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de P_1. Conclure.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°13

Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.
On souhaite déterminer une expression de u_n en fonction de *n*.

1. Réaliser le calcul des vingt premiers termes de la suite (u_n). Cette suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?

> Appeler le professeur pour lui soumettre cette réalisation et ces avis

2. On considère les suites (v_n) et (S_n) définies par :

$$\text{pour tout } n \text{ entier naturel, } v_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k .$$

Réaliser le calcul des premiers termes de ces suites et conjecturer la nature de (v_n) et une relation entre u_{n+1} et S_n.

3. Comment les résultats précédents permettent-ils de trouver une expression de u_n en fonction de *n* ?

> Appeler le professeur pour lui soumettre ces calculs
> et lui proposer la démarche

4. Exprimer u_n en fonction de *n*.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°14

Changements d'état

On conserve dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires qui peuvent se trouver dans deux états physiologiques désignés par A et B. On désigne par a_n et b_n les effectifs – exprimés en milliers d'individus − des deux populations à l'instant *n*. Des observations menées sur une assez longue période permettent d'estimer que :

$$a_{n+1} = 0,95\,a_n + 0,2\,b_n \text{ et } b_{n+1} = 0,05\,a_n + 0,8\,b_n$$

(95% des unicellulaires se trouvant à l'instant *n* dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant *n* + 1, non plus que 80% de ceux se trouvant à l'instant *n* dans l'état B). L'effectif total s'élève à 500 000 individus.

1. La population à l'instant 0 satisfait $a_0 = 375$. Faire le calcul des effectifs a_n et b_n pour $n \leqslant 50$. Peut-on faire une conjecture sur le comportement asymptotique des suites (a_n) et (b_n) ?

> Appeler le professeur, lui montrer les calculs
> et lui soumettre cette conjecture

2. Effectuer de nouveaux essais en modifiant les valeurs a_0 et b_0. On pourra par exemple prendre $a_0 = 0$, puis $a_0 = 125,\ 250,\ 400$, et enfin 500. Observe-t-on une dépendance par rapport à la distribution initiale ?
3. Montrer finalement que la suite de terme général $a_n - 400$ est géométrique et conclure.

> Appeler le professeur pour lui soumettre cette conclusion

4. Indiquer les démarches permettant de prouver les assertions précédentes.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°15

Suite d'équations

À tout entier naturel *n* non nul, on associe la fonction f_n, définie sur [0, 1] par : $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^n$.

1. Représenter une fonction f_n. Faire varier n. Combien l'équation $f_n(x) = 0$ semble-t-elle posséder de solutions ?

Appeler le professeur pour lui montrer la construction et l'animation,

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution. On note u_n cette unique solution. Reprendre l'animation précédente et observer le comportement de la suite (u_n). Quel semble être son sens de variation ? Cette suite a-t-elle une limite ? Que dire de cette limite ?

Appeler le professeur pour discuter ces conjectures

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante. On pourra pour cela montrer que $f_{n+1}(u_n)$ est positif. En déduire qu'elle est convergente.
4. Montrer, pour tout n, l'égalité : $u_n = \mathrm{e}^{-\frac{u_n}{n}}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°16

Un lieu pour deux

Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, et un point A tel que OA < 1.

À tout point P du cercle $\mathcal{C}$ on associe le point Q, point du cercle $\mathcal{C}$ tel que le triangle PAQ soit rectangle en A et direct. On appelle I le milieu de [PQ] et H le pied de la hauteur issue de A du triangle APQ.

1. Réaliser une figure dynamique et identifier un cercle sur lequel I demeure tant que P se déplace sur $\mathcal{C}$. Quel semble être le centre de ce cercle ?

> Appeler le professeur, lui montrer la figure
> et les conjonctures émises

2. Quel semble être le lieu du point H ?
3. On appelle Ω le milieu de [OA]. Vérifier que les distances IΩ et HΩ semblent constantes.

> Appeler le professeur pour examiner ces idées

4. Montrer que $\mathrm{IA}^2 + \mathrm{IO}^2 = 1$, puis calculer $\mathrm{I}\Omega^2$ (on pourra utiliser le théorème de la médiane). Conclure.
5. Montrer qu'on a également $\mathrm{HA}^2 + \mathrm{HO}^2 = 1$. Conclure.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°17

Essai d'un dé tétraédrique

On désire savoir si un dé tétraédrique est bien équilibré. Pour cela, on effectue 200 lancers de ce dé, et on obtient les résultats suivants :

Numéro porté par la face	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face	58	49	52	41

1. Calculer les fréquences de sortie f_k de chaque face.
2. On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{k=4} \left(f_k - \frac{1}{4} \right)^2$. Calculer d^2.
3. Effectuer sur une feuille de calcul une simulation de 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré. Rassembler les résultats dans un tableau analogue au précédent et calculer le d^2 correspondant.

Appeler le professeur pour lui montrer de travail

4. On réalise 1 000 simulations de 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré. On obtient des résultats dont on peut tirer le tableau suivant concernant la série des valeurs de d^2 obtenues :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0, 000 05	0, 000 75	0, 001 55	0, 002 95	0, 005 15	0, 007 65	0, 002 35

Au risque 10%, peut-on estimer que le dé examiné est bien équilibré ?

Appeler le professeur, lui dire comment on pourrait effectuer les 1 000 simulations et lui donner la réponse à la dernière question

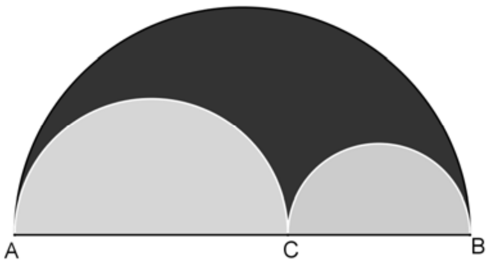
Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°18

L'arbelos et le premier cercle de Pappus

On considère un demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre [AB], un point C du segment [AB] distinct de ses extrémités et les demi-cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de diamètres respectifs [AC] et [BC], situés dans le même demi-plan de frontière (AB) que $\mathcal{C}$. Le domaine en gris foncé ci-contre est appelé arbelos.



La perpendiculaire en $\mathcal{C}$ à (AB) coupe $\mathcal{C}$ au point D. Les droites (DA) et (DB) coupent $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement en E et F.

1. Faire une figure. Quelle semble être la nature du quadrilatère CEDF ?

> Appeler le professeur pour lui montrer la figure
> et lui soumettre cette conjecture

2. Montrer que CEDF est un rectangle. Comparer l'aire du disque circonscrit à ce rectangle à l'aire de l'arbelos.
3. Pourquoi la droite (EF) est-elle tangente aux deux demi-cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$?
4. Les droites (AB) et (EF) se coupent en I. Soit K le point de contact avec $\mathcal{C}$ de la tangente à $\mathcal{C}$ passant par I. Chercher sur le segment [OK] le centre M d'un cercle Γ tangent à $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

> Appeler le professeur pour lui montrer le résultat
> de cette recherche

5. Vérifier que la distance de M à la droite (AB) est le double du rayon de Γ. En ajoutant cette observation aux hypothèses de la question 4, indiquer une démarche permettant d'établir le résultat.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°19

Alignement complexe

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ et le cercle Γ de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}\cdot$

Soit M un point du cercle Γ, d'affixe z. Au point M on associe les points M' et M" d'affixes respectives $z' = z + \mathrm{i}$ et $z'' = \mathrm{i}z$.

1. Quelles transformations sont représentées par les écritures complexes précédentes ?
2. Faire une figure. Quels ensembles semblent décrire M' et M" lorsque M décrit le cercle Γ ?

Appeler le professeur pour vérifier ces points de départ

3. Observer les points O, M' et M". Comment faire « confirmer » cette observation par le logiciel ?
4. Montrer que, pour tout point M de Γ, il existe un réel θ appartenant à l'intervalle $\left[0, 2\pi\right[$ tel que l'affixe z de M s'écrive $z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$. Faire apparaître θ à l'affichage.
5. Conclure quant à l'alignement de O, M' et M"

Appeler le professeur pour discuter cette conclusion.

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°20

Avec un triangle, des carrés et des parallélogrammes

On considère un triangle ABC direct. On construit les carrés directs CBDE, ACFG et BAHI. On complète cette figure avec les parallélogrammes directs FCEK et BIJD.

1. Faire la figure. À l'aide d'une animation, faire varier le triangle AJK. De quelle nature semble-t-il être ? Comment varie le milieu M du segment [JK] ?

Appeler le professeur, lui montrer la figure et lui soumettre ces manipulations

2. On se place dans le plan complexe. On attribue à A l'affixe a, à B l'affixe b et à C l'affixe c. Calculer les affixes de J, K et M et trancher ainsi la conjecture.

Appeler le professeur pour lui soumettre ces calculs

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°21

Lieu de points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5,5]$ par : $f(x)=\sqrt{10x+50}$.

On note respectivement $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'origine O et on appelle A et B les points de coordonnées respectives (−5, 0) et (5, 0). Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$, d'abscisse m et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. On considère le point M' d'ordonnée négative se projetant aussi en H et tel que AM' = HM. Le but de cet exercice est de déterminer le lieu du point M' lorsque M parcourt la courbe $\mathcal{C}$.

1. a) À l'aide d'un logiciel de géométrie, tracer la courbe $\mathcal{C}$ et représenter les points A, B, M, H et M'.
   b) Faire afficher le lieu du point M' lorsque M décrit la courbe $\mathcal{C}$.

> Appeler le professeur pour une vérification
> et une aide éventuelle

   c) Que peut-on conjecturer sur le lieu du point M' ?

   d) Utiliser le logiciel pour contrôler cette conjecture et, éventuellement, la rectifier.

> Appeler le professeur pour une vérification des conjectures
> et une aide éventuelle

2. Exprimer les coordonnées des points M et H en fonction de m.

   Exprimer AM'² de deux façons différentes. En déduire une relation entre les coordonnées du point M' puis conclure.