Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 1

Un napperon

Sur une table rectangulaire, on veut placer un napperon ayant la forme d'un quadrilatère. On souhaite que l'aire du napperon soit égale à la moitié de l'aire de la table.

La table est figurée par un rectangle ABCD et le napperon par le quadrilatère MNPQ tel que M soit un point de [AB], N un point de [BC], P un point de [CD] et Q un point de [DA].

1. Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.

Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure obtenue

2. Faire afficher l'aire du rectangle ABCD et l'aire du quadrilatère MNPQ.

3. En faisant varier la position des points N et Q, émettre une conjecture concernant une condition suffisante pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la moitié de celle du rectangle ABCD.

Appeler l'examinateur pour conforter cette conjecture

4. Démontrer le résultat conjecturé.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 2

Aires de rectangles de périmètre donné

Une unité de longueur est donnée. On s'intéresse à l'aire de rectangles dont le périmètre est égal à 20.

1. À l'aide d'un tableur, compléter le tableau suivant :

Mesure de la largeur	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4		
Mesure de la longueur										
Aire du rectangle										

À l'aide du tableur, représenter graphiquement l'aire en fonction de la largeur.

> Appeler l'examinateur et lui montrer la feuille de calcul et le graphique

2. D'après cette étude, quelle semble être la plus grande valeur possible pour l'aire du rectangle ? Pour quelle longueur est-elle obtenue ?

3. En notant x la longueur du rectangle, exprimer son aire $A(x)$ en fonction de x.
Calculer ensuite $d(x) = 25 - A(x)$.

> Appeler l'examinateur et lui montrer le résultat de ce calcul

4. Montrer que, pour toute longueur x, $d(x) = (x - 5)^2$.
Quelle est l'aire maximale d'un rectangle de périmètre 20 ?
À quelle longueur cette aire correspond-elle ?

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 3

Calcul rapide de carrés parfaits

Dans le tableau ci-dessous, chaque nombre de la seconde colonne – sauf le premier – est obtenu comme somme des nombres se trouvant sur la ligne située au-dessus de lui et du nombre situé à sa gauche.

Suite des nombres entiers	Somme trouvée
0	0
1	1
2	4
3	9
4	
5	
6	

1. À l'aide d'un tableur, compléter le tableau ci-contre jusqu'à la ligne 25. Que remarque-t-on ?

2. Réaliser une représentation graphique de la série des nombres occupant la deuxième colonne.

Appeler l'examinateur et lui montrer la feuille de calcul et le graphique.

3. Établir que, pour tout entier naturel n, $(n+1)^2 = n^2 + (n+1) + n$.

Appeler l'examinateur et lui montrer la démonstration de ce résultat.

4. À l'aide du tableur, organiser le calcul de la somme des entiers impairs consécutifs 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 + 7, …. Que remarque-t-on ?

Proposer une autre méthode pour calculer rapidement des carrés parfaits.

Appeler l'examinateur pour lui demander une aide éventuelle et proposer une méthode de calcul.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 4

Moyenne proportionnelle

On considère un segment [BC] et un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC].
Soit A un point de ce demi-cercle. On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, construire la figure, en prenant BC = 12.

   a. Quelles sont les mesures données par le logiciel pour les longueurs BH et HC ?
   b. Comparer leur produit au carré de AH.

> Appeler l'examinateur et lui montrer la figure et les mesures fournies par le logiciel

   c. Est-il toujours vrai que, dans un triangle rectangle, la hauteur soit moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse ?

2. **a.** Quelles sont les mesures données par le logiciel pour les longueurs BC et HC ?
   b. Comparer le carré de AC au produit de BC et HC.

> Appeler l'examinateur et lui montrer les mesures fournies par le logiciel.

   c. Démontrer le résultat conjecturé.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 5

Somme de distances dans un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral et un point M à l'intérieur de ce triangle.
On note A', B' et C' les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur (BC), (AC) et (AB).

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Afficher la somme $S = \mathrm{MA}' + \mathrm{MB}' + \mathrm{MC}'$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la somme S.

2. Faire une conjecture concernant la somme S lorsqu'on déplace le point M à l'intérieur du triangle ABC.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. On considère le point H milieu du segment [BC], afficher et comparer la longueur AH à la somme S.
Quelle conjecture peut-on émettre ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

4. En considérant la somme des aires des triangles AMB, CMB et CMA et l'aire du triangle ABC, démontrer le résultat conjecturé.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 6

Sommes d'entiers consécutifs

Soit n un nombre entier positif.

L'objectif de cet exercice est de déterminer une méthode simple pour calculer la somme des entiers consécutifs de 0 à n.

On note $S(n)$ cette somme. Par exemple : $S(0)=0$, $S(1)=0+1=1$, $S(2)=0+1+2=3$.

1. À l'aide d'un tableur, calculer $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, …, $S(10)$, $S(20)$, $S(100)$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

2. Calculer alors le double des valeurs précédentes.
Faire une conjecture sur l'expression de $S(n)$ en fonction de n.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

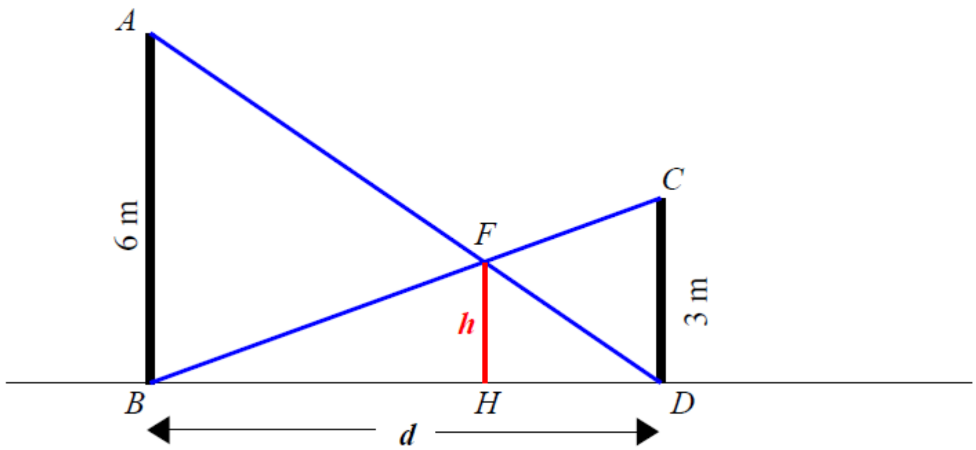
3. Démontrer le résultat conjecturé.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 7

Prendre de la hauteur

Deux poteaux verticaux de 3 m et 6 m respectivement sont plantés sur un sol horizontal.
Du sommet de chacun au pied de l'autre, on tend un câble.
À l'intersection des deux câbles, on veut accrocher une lampe.
On fait varier la distance d entre les deux poteaux et on s'intéresse à la hauteur h du point de fixation.



1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Afficher la hauteur h du point de fixation. Faire une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire varier la distance BD et faire une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture.

3. Démontrer le résultat conjecturé.
(On pourra d'une part utiliser le théorème de Thalès dans les triangles ADB et CBD, d'autre part remarquer que $BH + HD = BD$).

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 8

Parabole et droite paramétrée

Soit f la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $x^2 - 4x + 3$, noté $f(x)$.
Soit a un nombre et soit g la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $a\,x + 3$, noté $g(x)$.
Pour établir les conjectures, on pourra se limiter aux nombres a tels que : $-5 \leqslant a \leqslant 5$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, représenter graphiquement les fonctions f et g. Faire afficher la valeur de a.

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

2. Par lecture graphique :

a. Quelles semblent être les solutions de l'équation $f(x) = 0$ **?**

b. Observer diverses représentations graphiques de g obtenues pour diverses valeurs de a. Vérifier que toutes ces droites passent par un même point, et que ce point appartient à la représentation graphique de f. Quelles sont les coordonnées de ce point ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

3. Détermination de a dans certaines situations particulières

a. Trouver une valeur entière de a pour laquelle les deux courbes semblent avoir un unique point commun.

b. Pour quelle valeur de a le point de coordonnées (3,0) semble-t-il être un des points d'intersection des deux courbes ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et une aide éventuelle.

4. **a.** Montrer que pour tout nombre x, $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$.

Démontrer le résultat conjecturé à la question 2. a.

b. Démontrer deux autres conjectures établies à la question 2.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 9

Nombres associés

On dit que deux entiers strictement positifs a et b sont « associés » lorsque le nombre $(ab+1)$ est un carré parfait.
Exemple : $3\times 8+1=25=5^2$ donc on peut dire que 3 et 8 sont associés.

On cherche à savoir si pour tout couple (a , b) de nombres associés il existe un nombre c associé commun à a et à b. Autrement dit, on cherche à savoir si pour tout couple (a , b) de nombres associés il existe un nombre entier strictement positif c tel que $ac+1$ et $bc+1$ soient des carrés parfaits.

1. **a.** À l'aide d'un tableur, chercher tous les couples de nombres associés compris entre 1 et 10.

b. Parmi les nombres associés trouvés à la question précédente trouver un nombre associé commun à deux autres nombres associés.

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

2. Soit a et b deux nombres associés. On note r le nombre entier positif tel que $ab+1=r^2$.

a. Choisir trois exemples de couples (a , b) de nombres associés et vérifier que le nombre $a+b+2r$ est associé commun à a et à b**.** Faire une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle

b. En transformant les expressions $a(a+b+2r)+1$ et $b(a+b+2r)+1$ de manière à faire apparaître une identité remarquable, montrer que le nombre $(a+b+2r)$ est un associé commun à a et à b.

Une bissectrice dans un triangle

Soit ABC un triangle. On considère la bissectrice issue du sommet A et on note K le point d'intersection de cette bissectrice avec le segment [BC].

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire la figure. Afficher les longueurs AB, AC, KB et KC puis les rapports $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{KB}{KC}$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire varier les sommets du triangle ABC et faire une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

3. **a.** Démontrer que le point K est équidistant des droites (AB) et (AC).

b. En calculant les aires des triangles ABK et ACK de deux façons différentes, démontrer le résultat conjecturé.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 11

Triplets pythagoriciens (2)

On dit que trois nombres a, b, c entiers naturels non nuls forment un triplet pythagoricien s'ils vérifient la relation : $a^2 + b^2 = c^2$.

Par exemple (3,4,5) est un triplet pythagoricien.

1. A l'aide d'un tableur, rechercher des valeurs de l'entier b telles que $a^2 + b^2$ soit un carré parfait dans les trois cas suivants :

$a = 5$ $a = 6$ $a = 7$

Donner trois exemples de triplets pythagoriciens.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

2. On s'intéresse aux triplets Pythagoriciens d'entiers consécutifs.

À l'aide d'un tableur, chercher tous les triplets pythagoriciens $(b-1, b, b+1)$ d'entiers consécutifs pour b compris entre 2 et 10 (On pourra organiser le calcul de $(b+1)^2 - b^2 - (b-1)^2$**).** Faire une conjecture.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

3. Soit b un entier quelconque supérieur à 2. Développer les expressions $(b-1)^2 + b^2$ et $(b+1)^2$.

Résoudre l'équation $(b-1)^2 + b^2 = (b+1)^2$.

Conclure.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 12

Opération « cartésienne »

Soit deux nombres strictement positifs a et b.
Dans un repère (O ; I, J), on considère les points A de coordonnées (a, 0) et B de coordonnées (0, b).
La parallèle à (AJ) passant par B coupe l'axe des abscisses en P.
On note p l'abscisse du point P.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire la figure.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure.

2. **a.** Observer la valeur de p pour différentes valeurs de a et b.
b. Quelle relation peut-on conjecturer liant le nombre p aux nombres a et b ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle

c. Démontrer le résultat de cette conjecture.

3. Imaginer de la même manière une méthode géométrique pour construire le point $\mathrm{Q}(q, 0)$ tel que $q = \dfrac{a}{b}$.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 13

Triplets pythagoriciens (1)

On dit que trois nombres a, b, c entiers naturels non nuls forment un triplet pythagoricien s'ils vérifient la relation : $a^2 + b^2 = c^2$.

Par exemple (3,4,5) est un triplet pythagoricien.

1. A l'aide d'un tableur, rechercher des valeurs de l'entier b telles que $a^2 + b^2$ soit un carré parfait dans les trois cas suivants :

$a = 5$ $a = 6$ $a = 7$

Donner trois exemples de triplets pythagoriciens.

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

2. On cherche d'autres triplets pythagoriciens.

a. À l'aide d'un tableur, organiser le calcul de $(m^2+1)^2 - (m^2-1)^2$ pour tous les nombres entiers m compris entre 1 et 10.

b. Faire une conjecture concernant la différence $(m^2+1)^2 - (m^2-1)^2$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. **a.** Développer les expressions $(m^2+1)^2$ et $(m^2-1)^2$.

b. En déduire que pour tout m entier supérieur ou égal à 2 : $(m^2-1, 2m, m^2+1)$ est un triplet pythagoricien.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 14

Longueur minimale (1)

On considère un trapèze rectangle ABCD de bases [AB] et [CD] tel que les droites (AB) et (BC) soient perpendiculaires.
Soit M un point du segment [BC].

Le but de cet exercice est de déterminer la position du point M telle que la distance $S = \mathrm{MA} + \mathrm{MD}$ soit minimale.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Afficher la distance *S*.
Combien de points M semblent-t-ils répondre au problème posé ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Construire le symétrique $\mathrm{A'}$ du point A par rapport à la droite (BC). Faire une conjecture concernant la ou les position(s) cherchée(s) pour le point M.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. Démontrer le résultat conjecturé à la question **2.**

Longueur minimale (2)

On considère un triangle ABC, rectangle en B. Soit M un point de l'hypoténuse. On note E et F les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur (AB) et (BC) respectivement.

Le but de cet exercice est de déterminer la position du point M afin que la longueur EF soit minimale.

1. **a.** Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Afficher les longueurs EF et BM.
b. Que peut-on conjecturer sur ces longueurs ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture et une aide éventuelle.

2. Démontrer le résultat conjecturé.

3. **a.** Faire une conjecture sur la position du point M afin que la longueur EF soit minimale.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

b. Démontrer le résultat conjecturé à la question 3. a.

Le meilleur prix

Au cours d'une saison annuelle, le centre culturel municipal propose 20 spectacles.
Il propose trois formules pour payer :
Formule A : on paie 11,50 euros par spectacle.
Formule B : on paie un forfait unique de 96 euros qui permet d'assister à autant de spectacles qu'on le désire.
Formule C : on paie un abonnement annuel de 30 euros puis on paye 5,5 euros par spectacle.

1. À l'aide d'un tableur, calculer, pour chacune des trois formules, le prix à payer pour un nombre de spectacles variant de 0 à 20.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

2. Faire une conjecture concernant les solutions les plus avantageuses en fonction du nombre de spectacles.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

3. En appelant x le nombre de spectacles, exprimer en fonction de x le prix à payer selon la formule choisie. Démontrer le résultat conjecturé.

.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 17

Fonction et équation produit

Soit f la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $\left(x^2-4\right)$, noté $f(x)$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, représenter graphiquement la fonction f.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

2. a. Par lecture graphique, quels semblent être les antécédents de 0 par la fonction f ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

b. Écrire, pour tout x, $\left(x^2-4\right)$ sous la forme d'un produit de facteurs. Démonter les résultats de la question précédente.

3. a. Soit a un nombre. Par lecture graphique, faire une conjecture concernant le nombre d'antécédents éventuels de a par la fonction f suivant les valeurs de a.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

b. Démontrer le résultat conjecturé.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 18

Comparaison et égalités d'aires

On considère un quadrilatère convexe ABCD et les points A', B', C' et D' tels que :
A est le milieu de $[DD']$, B le milieu de $[AA']$, C le milieu de $[BB']$ et D le milieu de $[CC']$.

Le but de cet exercice est la comparaison des aires des quadrilatères ABCD et $A'B'C'D'$.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire la figure. Afficher les aires des quadrilatères ABCD et $A'B'C'D'$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et des aires..

2. Faire une conjecture concernant les aires des quadrilatères ABCD et $A'B'C'D'$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

3. Après avoir tracé la diagonale [AC], afficher les aires des triangles ADC, ADC' et $C'AD'$.
Afficher de même les aires des triangles ACB, CBA' et $CA'B'$. Faire deux conjectures.

> Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et une aide éventuelle.

4. **a.** Démontrer l'une des conjectures précédentes et donner les étapes du raisonnement conduisant à l'égalité entre les aires du quadrilatère ABCD et des triangles $C'DD'$ et $A'BB'$.

b. Quelle égalité peut-on de même obtenir entre les aires du quadrilatère ABCD et des triangles $D'AA'$ et $B'CC'$?

c. Conclure.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 19

Comparaison d'aires

On considère un triangle ABC et les points A', B' et C' tels que :
A est le milieu de $[BB']$, B le milieu de $[CC']$ et C le milieu de $[AA']$.

Le but de cet exercice est la comparaison des aires des triangles ABC et $A'B'C'$.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire la figure. Afficher les aires des triangles ABC et $A'B'C'$.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et des aires.

2. Faire une conjecture concernant les aires des triangles ABC et $A'B'C'$.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

3. **a.** Démontrer l'égalité des aires des triangles ABC et ABC', puis celles des triangles ABC' et $C'AB'$.

b. En déduire que les trois triangles ABC, ABC' et C'AB' ont la même aire.

Appeler l'examinateur pour une aide éventuelle.

4. En procédant de la même façon, démontrer que les 7 triangles ABC, ABC', $AB'C'$, $AB'C$, $A'B'C$, $A'BC$, $A'BC'$ ont la même aire. Conclure.

Aire maximale pour un périmètre donné

Une unité de longueur est donnée.

On considère un segment [HD] de longueur 10 et son milieu A.
Soit B et C les points tels que ABCD soit un carré.
Soit un point M de [HD]. On considère le point E de la demi-droite [DC) tel que HM = DE et le point G tel que le quadrilatère MDEG soit un rectangle.
On note K le point d'intersection des droites (AB) et (GE) et F le point d'intersection des droites (BC) et (GM).

Le but de cet exercice est de déterminer la position du point M telle que l'aire du rectangle MDEG soit maximale.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Afficher les aires du rectangle MDEG et du carré ABCD.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire une conjecture concernant la position du point M cherchée.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

3. Démontrer que le quadrilatère BKGF est un carré

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

4. Démontrer que l'aire du carré ABCD est la somme de l'aire du rectangle MDEG et du carré BKGF (on pourra noter x la longueur du segment [HM]).

5. Démontrer le résultat conjecturé dans la question **2**.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 21

Aire et proportion

Soit ABCD un quadrilatère convexe. On note E le point d'intersection de ses diagonales.
On appelle a_1, a_2, a_3 et a_4 les aires respectives des triangles ABE, BCE, CDE et DAE.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire la figure. Afficher les aires a_1, a_2, a_3 et a_4.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et des aires.

2. Afficher le nombre *n* défini par $n = \dfrac{a_1 \times a_3}{a_2 \times a_4}$. Faire une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

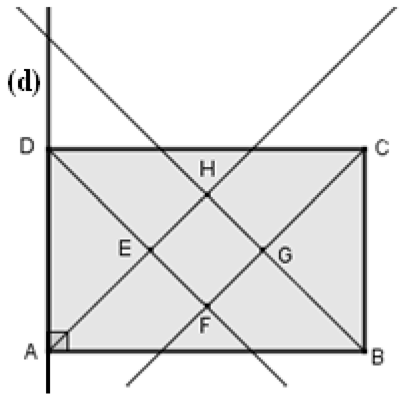
3. Démontrer le résultat conjecturé.
On pourra considérer les points H et K, pieds des hauteurs issues de A et C dans les triangles ABD et CBD respectivement.

Académie de Versailles **Année 2008-2009**

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 22

Un carré dans un rectangle



Une unité de longueur est donnée.
Soit A et B deux points du plan tels que AB = 4 et D un point quelconque de la droite (*d*) perpendiculaire à (AB) passant par A (D distinct de A). Le point C est tel que le quadrilatère ABCD est un rectangle. Les points d'intersection des bissectrices des angles de sommets A, B, C et D déterminent un quadrilatère EFGH.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire la figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire varier le point D sur la droite (*d*).

   a. Que peut-on conjecturer quant à la nature du quadrilatère EFGH ?
   b. Afficher la longueur AD. Que peut-on conjecturer sur la longueur AD lorsque les points H et F appartiennent respectivement aux côtés [AB] et [CD] ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et une aide éventuelle.

3. **a**. Déterminer la nature du triangle AED.
Démontrer que le quadrilatère EFGH est un carré.
b. Démontrer le résultat conjecturé à la question **2. b.**