Séance: Connaître les angles d'un triangle – 5ème

Thème: Espace et Géométrie (Géométrie plane)

Extraits BO:

La valeur de la somme des angles d'un triangle peut être démontrée et est utilisée. L'inégalité triangulaire est énoncée. Le lien est fait entre l'inégalité triangulaire et la construction d'un triangle à partir de la donnée de trois longueurs. Des constructions de triangles à partir de la mesure d'une longueur et de deux angles ou d'un angle et de deux longueurs sont proposées.

Prérequis:

Ce que sait faire l'élève:

- Le codage des figures
- Les différents types d'angles.
- Les différents types de triangles (propriétés et construction «longueurs et angles»)
- Il transforme une figure par symétrie centrale.
- Il mène des raisonnements en utilisant des propriétés des figures, des configurations et des symétries. .

Compétences mobilisées: Raisonner, Chercher, Calculer.

D'après le BO hors série n°6 avril 2007 «À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution».

C'est évidemment le cas dans le cadre de la géométrie.

Raisonner

- Démontrer un résultat ou calcul une grandeur en utilisant la propriété de la somme des angles d'un triangle.

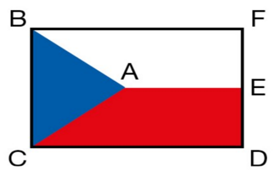
- Démontrer un résultat en utilisant les notions de géométrie plane.

Chercher

•Mobiliser ses connaissances pour résoudre un problème.
• Essayer plusieurs pistes.

Avant le cours: Exercice 76 transmaths page 507

Le drapeau rectangulaire de la République tchèque est constitué de deux bandes rouge et blanche symétriques par rapport à (AE) et d'un triangle bleu isocèle en A avec $\widehat{BAC} = 70°$.



Construire ce drapeau avec BC = 6 cm et $CD = \frac{3}{2} \times BC$.

A la fin de la troisième séance les élèves ont trouvé la solution. (cf. Annexe)

I-Activité rapide

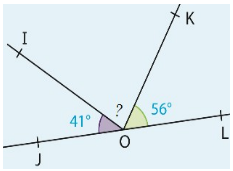
QUESTIONS FLASH

1. Calculer mentalement:

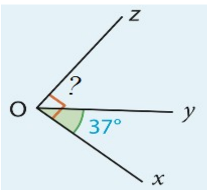
a. 180 – (60 +20) b. 180 - 60 + 20 c. 180 – 60 – 20

2. Lesquels de ces calculs permettent de déterminer la mesure de l'angle marqué par le point d'interrogation ?

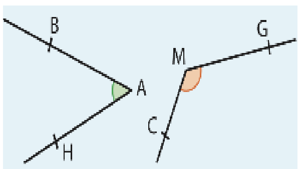
a. 180 – (41 + 56)
b. 180 + (56 – 41)
c. 180 – 41 – 56
d. 180 – 56 + 41



3. Déterminer la mesure de l'angle marqué par le point d'interrogation et nommer cet angle.



4. L'angle orange est-il aigu ou obtus ? Nommer cet angle.



Problème de construction: Pour motiver l'étude des propriétés et la relier à la vie courante, le professeur propose ce problème où il faut d'abord déterminer la mesure d'un angle avant la construction.

Objectifs: Répondre à la question «à quoi ça sert la propriété»

- Appliquer la somme des mesures des angles d'un triangle isocèle.
- Insister sur le fait que «voir sur une figure» n'est pas suffisant, il faut calculer et prouver en utilisant les données de l'énoncé et les propriétés énoncées en cours.

L'objectif de l'activité rapide est de réactiver les notions antérieures afin de préparer les élèves à l'étude de la nouvelle notion.

Notion a réinvestir dans cette activité:

- Calcul mental (distributivité, priorité des opérations avec ou sans parenthèses).
- Les différents types d'angles.
- Complément à 180

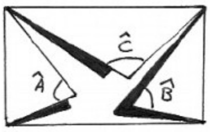
<table>
<tr>
<td>

II- Activité préparatoire à l’acquisition d’une nouvelle notion :

<u>Temps1:</u> **Activité 1: Triangles et angles**

1.

- Sur une feuille blanche, trace un triangle quelconque.
- Effectue le pliage ci-dessous de façon à ramener les sommets du triangle pour former un rectangle.
- Colle le rectangle obtenu dans l'encadré ci-dessous.



2. Que peut-on conjecturer?

…..

3. Réitère l’expérience avec deux autres triangles quelconques.

4. Que peut-on conjecturer?

…..

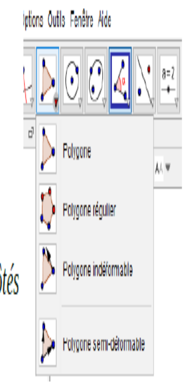
5. **<u>Conclusion:</u>** complète la phrase suivante

Dans un triangle, la …............................. des angles est égale à …..

<u>Temps 2:</u> **Activité 2 (cf. Annexe)**

<u>PARTIE 1 : Tracer un triangle quelconque sur Geogebra.</u>

1. Clique sur l’icône  puis sur « polygone » afin de tracer un triangle ABC quelconque.



<u>Remarque :</u> n’oublie pas de revenir au point de départ pour tracer les trois côtés du triangle.

</td>
<td>

L'approche par des puzzles ou des animations qui permettent aux élèves de trouver eux-mêmes la propriété.

• **Objectif:** L'objectif de cette activité est de permettre d'établir une conjecture quant à la somme des mesures des angles d'un triangle puis d'en faire une démonstration.

• **Prérequis** : Les différents types d'angles (la mesure de l'angle plat)

L'activité s'effectue en autonomie à la maison, le professeur fait la conclusion avec les élèves en classe.

On peut conjecturer que les trois angles semblent former un angle plat quand on les place côte à côte.

<u>Vérifier la conjecture avec GeoGebra:</u>

Objectif: Mettre en évidence une propriété mathématique sur les angles d’un triangle et vérifier la conjecture obtenue à l'aide de l'activité 1.

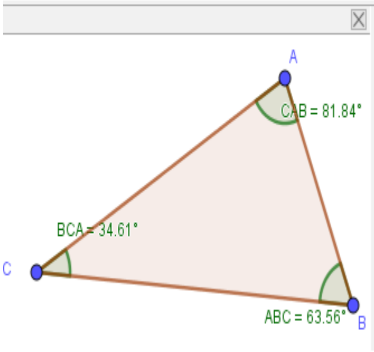
L'utilisation de Géogebra amène l'élève à tester différentes configurations de triangles et de vérifier l'hypothèse que la somme fait 180° .

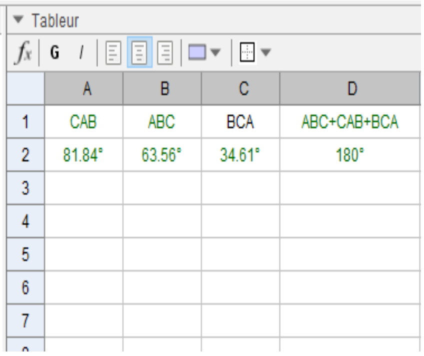
<u>Modalités de mise en œuvre:</u>

En utilisant le tableau numérique interactif (TNI), l'activité peut être effectuée en classe.

Ou TP (travaux pratiques) en salle d'informatique).

</td>
</tr>
</table>





Tableur

	A	B	C	D
1	CAB	ABC	BCA	ABC+CAB+BCA
2	81.84°	63.56°	34.61°	180°
3				
4				
5				
6				
7				

<u>Temps 3:</u> Échange avec les élèves pour faire dire/ constater que ***la somme des mesures des trois angles dans un triangle est égale à 180°.***

Le professeur va faire reformuler deux ou trois élèves sur la propriété

À cette étape le professeur peut démontrer la propriété avec les élève

Pour démontrer la propriété (**selon la progression)**, le professeur peut utiliser la symétrie centrale ou l'égalité des mesures d'angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante.

III- La trace écrite dans le cahier de cours :

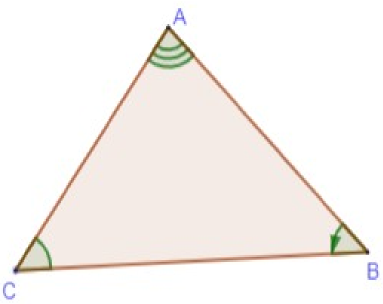
<u>Somme des mesures des angles d'un triangle</u>

<u>Propriété 1:</u>

Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.

Autrement dit, dans le triangle ABC

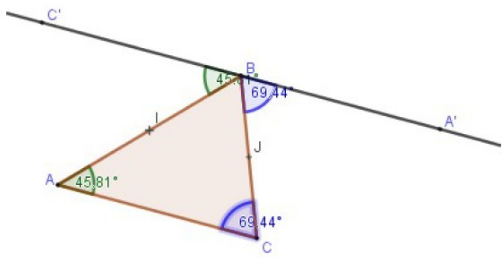
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$



A partir d'un travail sur la symétrie centrale, nous allons mettre en évidence que la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°.

Démonstration:

La trace écrite: Pour gagner du temps le professeur peut distribuer la démonstration sous la forme d'un puzzle



ABC est un triangle quelconque. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [BC].

C' est le symétrique de C par rapport à I et A' est le symétrique de A par rapport à J.

Montrer que $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}$ **= 180°**

Démonstration (cf. annexe)

Les symétriques des points A et C par rapport au point I sont respectivement B et C'.
Le symétrique de la droite (AC) par rapport au point I est donc la droite (BC') **avec (AC) // (BC').**

Les symétriques des points A et C par rapport au point J sont respectivement A' et B
Le symétrique de la droite (AC) par rapport au point J est donc la droite (BA') **avec (AC) // (BA').**

1- On veut montrer que les points A' ; B et C' sont alignés

On a: (BA') // (AC) et (BC') // (AC),

Or, deux droites parallèles à la même troisième sont parallèles entre elles. Donc (BA') // (BC')

Ces deux droites ayant en commun le point B, elles sont confondues :

A', B et C' sont donc alignés.

Le symétrique de l'angle BAC est l'angle ABC '. On a donc $\widehat{BAC}=\widehat{ABC'}$

Le symétrique de l'angle BCA est l'angle CBA' . On a donc $\widehat{BCA}=\widehat{CBA'}$

$\widehat{A'BC'}=\widehat{C'BA}+\widehat{ABC}+\widehat{CBA'}$

Comme: $\widehat{BAC}=\widehat{ABC'}$ et $\widehat{BCA}=\widehat{CBA'}$

On a donc: $\widehat{A'BC'} = \widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}$

Les points A' ; B et C' sont alignés, alors, $\widehat{A'BC'}$ = 180° **(un angle plat)**

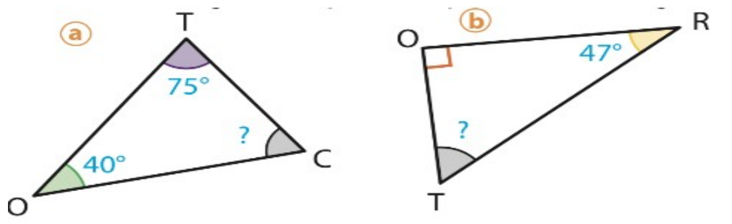
et $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}$ = 180° .

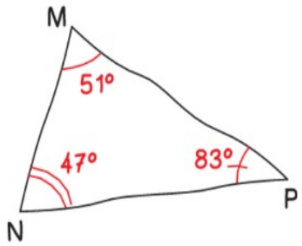
IV- Deux exercices d'application directe

Exercice 1: (Mission Indigo 2020)

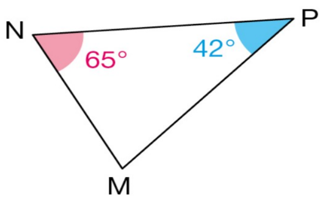
Pour chacun des triangles suivants, déterminer la mesure de l'angle marqué par un point d'interrogation.

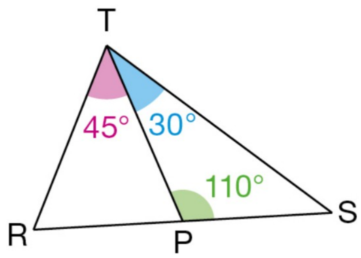
Cet exercice est une application directe de la somme des mesures des angles d'un triangle.
Connaissant les mesures de deux angles l'élève peut déterminer la mesure du troisième angle.
On profitera de cet exercice pour bien faire ressortir qu'il n'est pas question ici de mesurer ce troisième angle avec le rapporteur

<table>
<tr>
<td>


<u>Exercice 2:</u>
Construire en vraie grandeur le triangle MNP tracé à main levée, si possible.


<u>Travaux à donner pour la prochaine séance</u>

<u>Exercices: 2 page 501 et 25 page 503 transmaths</u>
<u>Exercice1</u>
2 À l'aide des informations codées sur cette figure, calculer la mesure de l'angle $\widehat{NMP}$.


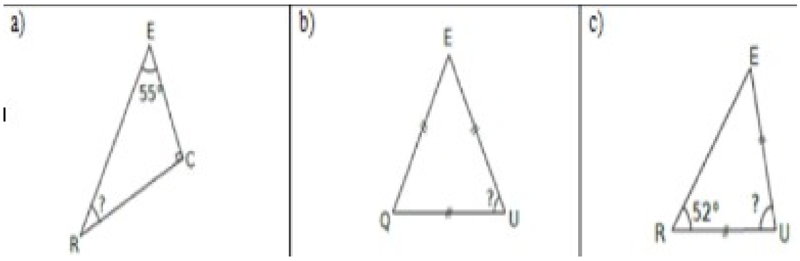
<u>Exercice2:</u>
25 Les points R, P, S sont alignés.
Calculer la mesure de chacun des angles $\widehat{TSR}$ et $\widehat{TRS}$.


</td>
<td>
sur la figure, mais de calculer cette mesure en utilisant le fait que la somme des trois mesures est égale à 180°.

Un exercice de raisonnement:
51° +47° +83° = 181°
Donc ce triangle n'existe pas.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
<u>Séance 2</u>
I. Correction de devoir.

II-Activité rapide
Réinvestir les notions de triangles particuliers
<u>III. Triangles particuliers:</u>
Les conséquences pour les angles aigus d'un triangle rectangle, pour les angles de la base un triangle isocèle et pour les angles d'un triangle équilatéral seront abordées.
IV. Exercices d'application directe
<u>Exercice 1</u>
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Dans caque cas, déterminer la mesure de l'angle marqué par un point d'interrogation en expliquant votre réponse:



Exercice 2:

Léa a construit un triangle et mesuré deux angles du triangle. Elle a obtenu 34° et 112°. Son triangle est-il particulier? Expliquer.

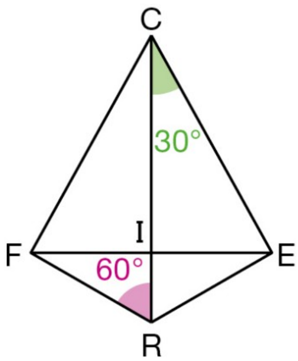
Prolongements possibles:

Ce type d'exercices permettent aux élèves de se confronter progressivement au raisonnement déductif avant de se lancer tout seul dans ce type de raisonnement.

Exercice 1: (transmath cycle 4)

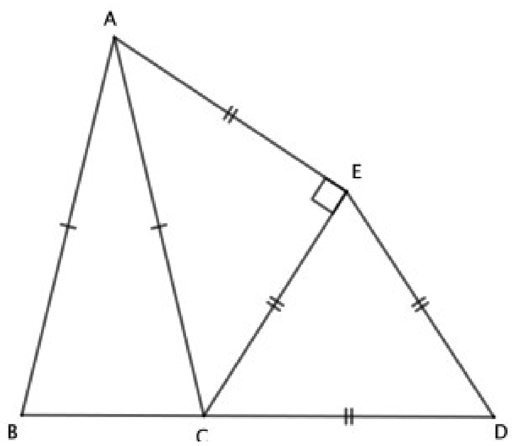
En vue de dessiner un cerf-volant, Inès a construit le quadrilatère CERF ci-contre où la droite (CR) est un axe de symétrie.

Calculer la mesure des angles $\widehat{RFC}$ et $\widehat{REC}$. Justifier.



Exercice 2: https://cache.media.eduscol.education.fr/

Calculer les mesures de chacun des angles de la figure ci-dessous:



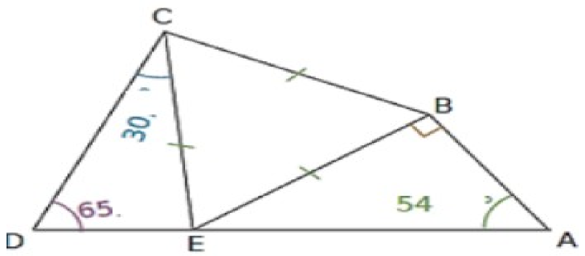
Utiliser des figures planes plus complexes.

Compétences mobilisées:

Calculer, raisonner, Communiquer

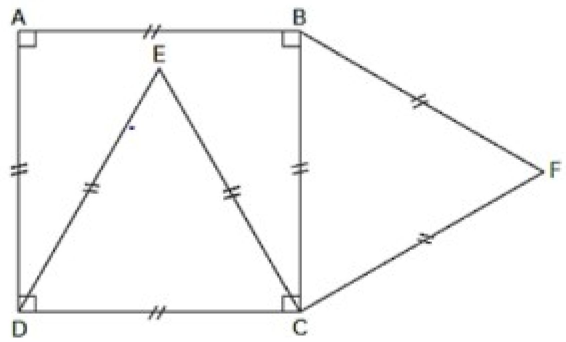
Exercice 3:

On donne la figure ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur. Les mesures d'angles sont exprimées en degré. **Les points D, E et A sont-ils alignés?** Justifier votre réponse.



Exercice 4: **Un même exercice, trois énoncés**

> ABCD est un carré.
>
> Le point E est à l'intérieur du carré tel que le triangle EDC est équilatéral.
>
> Le point F est à l'extérieur du carré tel que le triangle BCF est équilatéral.



Pistes de différenciation pédagogique:

Groupe1

Enoncé A	Enoncé A (avec aide)
Démontrer que les points A, E, F sont alignés	Démontrer que les points A, E, F sont alignés Aide : Démontrer que les points A, E, F sont alignés revient à démontrer que la mesure de l'angle $\widehat{AEF}$ est égale à 180°.

Groupe 2

à la fin du chapitre le professeur peut proposer cet exercice de recherche **(d'abord individuellement puis plusieurs, «travail en groupes homogènes»),** il permet de travailler le raisonnement et de comprendre l'intérêt de l'étude des propriétés.

- Une première difficulté consiste à reconnaître EBF comme un triangle rectangle isocèle car il est «sur la pointe» et, de plus, ce triangle n'est pas tracé entièrement.
- Une deuxième difficulté consiste à reconnaître ADE comme un triangle isocèle car «il a la pointe en bas et un côté vertical».

Enoncé B

a. Calculer la mesure des angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{CEF}$.

b. Démontrer que les points A, E, F sont alignés.

Groupe 3

Enoncé C

a. Ecrire toutes les mesures d'angles connues.

b. Quelle est la nature des triangles ECF et ADE ?

Justifier.

c. Calculer la mesure de l'angle au sommet principal de chacun de ces deux triangles.

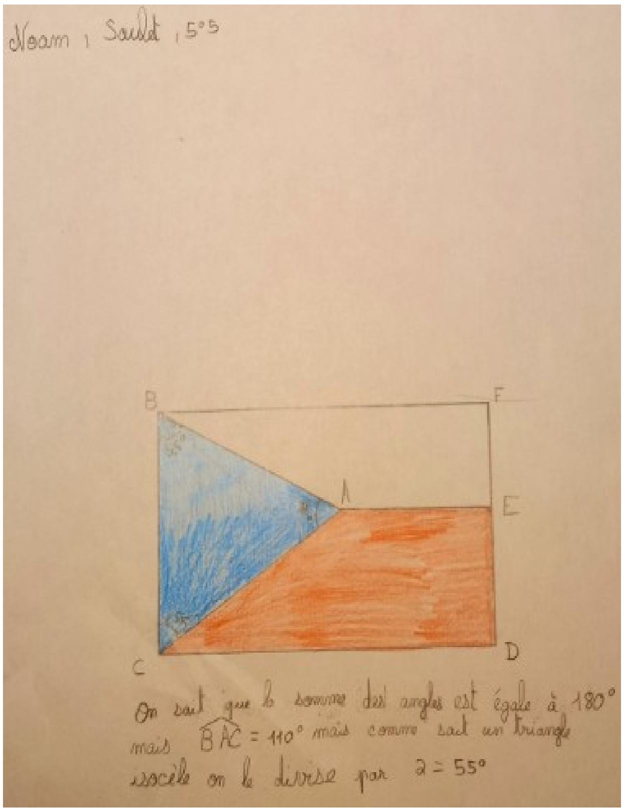
d. Calculer alors la mesure des angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{CEF}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AEF}$.

e. Que pouvez-vous dire des points A, E et F ? Justifier.

Annexe

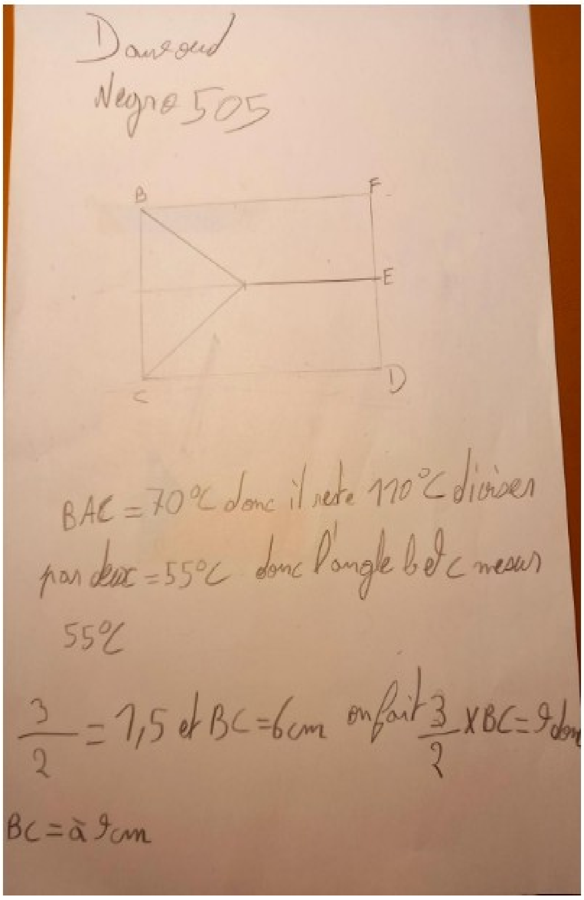
Exercice 76 transmaths cycle 4 page 507

Pour construire le drapeau, les élèves ont commencé par le rectangle BCDF, ils ont tracé la droite (AE) parallèle à au segment [BF], tel que le point E est le milieu du segment [FD]. À la fin de la troisième séance les élèves ont compris que pour tracer le triangle ABC, il faut connaître soit la longueur d'un autre côté pour pouvoir utiliser le compas ou trouver la mesure des angles de la base. Donc il fallait utiliser la propriété pour trouver la mesure manquante.

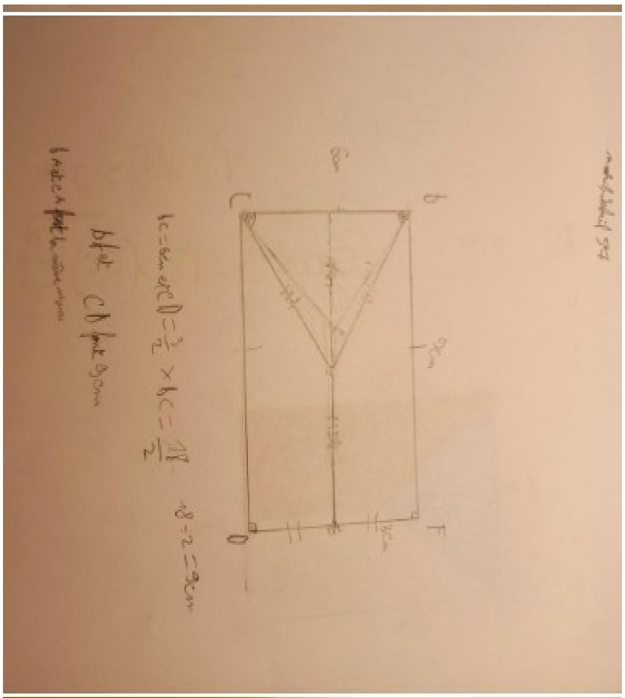


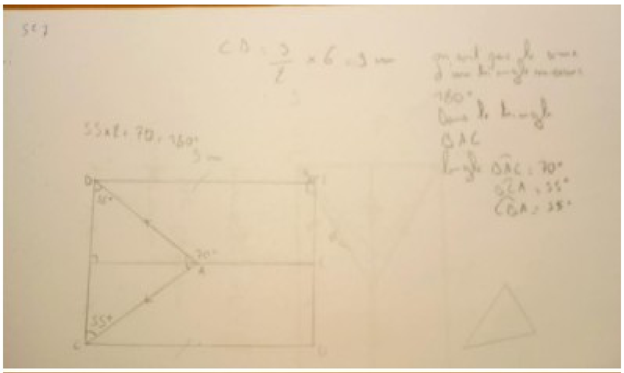
Constructions instrumentées: (la précision)

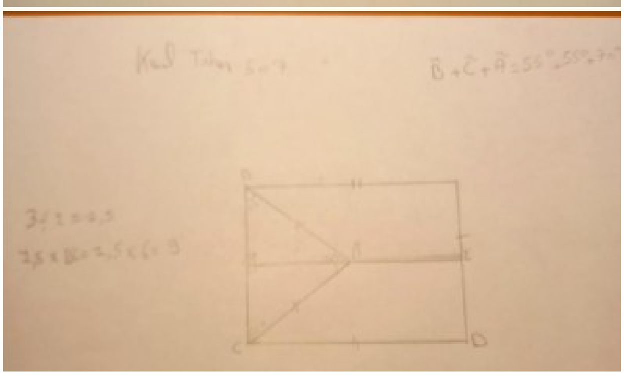
Il y a des écarts au niveau des mesures des longueurs et des angles.



- Le dessin effectué se présente sur un fond d'essais mal gommés.
- L'élève confond l'unité de mesure d'angle et l'unité de mesure de la température, il a écrit °C «Celsius».



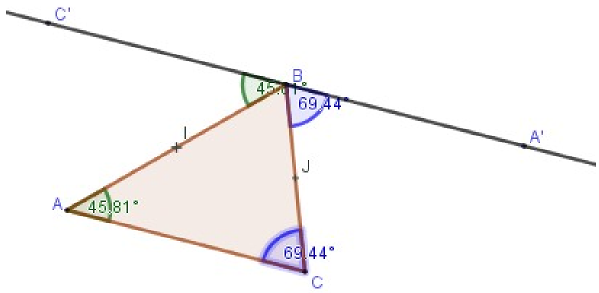




Démonstration

Le triangle ABC ci-dessous est quelconque. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [BC].

C' est le symétrique de C par rapport à I et A' est le symétrique de A par rapport à J.



Montrer que $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}$ **= 180°**

Démonstration:

Les symétriques des points A et C par rapport au point I sont respectivement B et C'.
Le symétrique de la droite (AC) par rapport au point I est donc la droite (BC') **avec (AC) // (BC').**

Les symétriques des points A et C par rapport au point J sont respectivement A' et B.
Le symétrique de la droite (AC) par rapport au point J est donc la droite (BA') **avec (AC) // (BA').**

1- On veut montrer que les points A' ; B et C' sont alignés

On a: (BA') // (AC) et (BC') // (AC),

Or, deux droites parallèles à la même troisième sont parallèles entre elles. Donc (BA') // (BC')

Ces deux droites ayant en commun le point B, elles sont confondues :

A', B et C' sont donc alignés.

Le symétrique de l'angle BAC est l'angle ABC '. On a donc $\widehat{BAC}=\widehat{ABC'}$

Le symétrique de l'angle BCA est l'angle CBA' . On a donc $\widehat{BCA}=\widehat{CBA'}$

$$\widehat{A'BC'}=\widehat{C'BA}+\widehat{ABC}+\widehat{CBA'}$$

Comme: $\widehat{BAC}=\widehat{ABC'}$ et $\widehat{BCA}=\widehat{CBA'}$

On a donc: $\widehat{A'BC'} = \widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}$

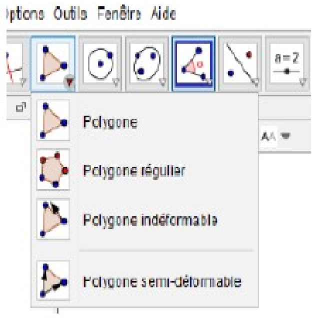
Les points A' ; B et C' sont alignés, alors, $\widehat{A'BC'}$ = 180° **(un angle plat)**

et $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}$ = 180° .

Activité 2

PARTIE 1 : Tracer un triangle quelconque sur Geogebra.

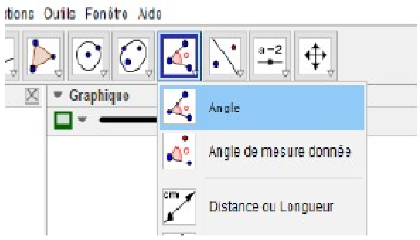
1. Clique sur l'icône  puis sur « polygone » afin de tracer un triangle ABC quelconque.



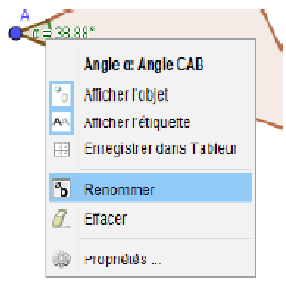
Remarque : n'oublie pas de revenir au point de départ pour tracer les trois côtés du triangle.

2. On veut marquer l'angle $\widehat{CAB}$. Pour cela, clique sur l'icône  , sur angle, puis clique sur les points C, A et B.

Remarque : le sommet de l'angle doit toujours être cliqué en 2e position.



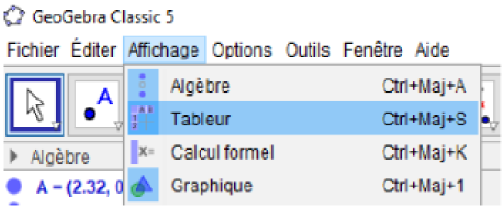
3. On veut renommer l'angle formé. Pour cela, faire un clique droit sur l'angle puis clique sur « renommer » et nomme-le CAB.



4. Répète les étapes 2 et 3 pour les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

PARTIE 2 : Calculer la somme des angles du triangle à l'aide d'un tableur.

1. Clique sur « affichage » dans la barre d'outils, puis sur « tableur ».



2. On doit nommer les colonnes du Tableur. Pour cela, saisis :
- en cellule A1 : « CAB » ;
- en cellule B1 : « ABC » ;
- en cellule C1 : « BCA » ;
- en cellule D1 : « CAB+ABC+BCA ».

<u>Remarque :</u> Les « » sont importants !

3. On veut enregistrer la valeur de chaque angle. Pour cela, saisis :
- en cellule A2 : CAB ;
- en cellule B2 : ABC ;
- en cellule C2 : BCA ;
- en cellule D2 : CAB+ABC+BCA.

<u>Remarque :</u> cette fois-ci, il ne faut pas mettre les « ».

Les valeurs des angles s'affichent automatiquement.

5. Déforme ton triangle autant de fois que tu le souhaites. Que constate-tu ?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

6. Complète la propriété suivante :

<u>Propriété :</u> Dans un triangle, la ……………….. de la mesure des ……………….. est égale à ……… .