Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°01

Double optimisation

Soit a un nombre réel positif donné. Dans le plan rapporté au repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le point B de coordonnées $(3,0)$ et les points C, D tels que :

- $OBCD$ est un trapèze de bases $[OB]$ et $[CD]$ rectangle en B ;
- $BC=7$ et C a une ordonnée positive ;
- $CD=a$ et D est du même côté de la droite (BC) que O ;

1. Sur la figure, réalisée avec un logiciel de géométrie, combien y a-t-il de points M appartenant au segment $[BC]$ pour lesquels les droites (DM) et (OM) sont perpendiculaires ?

2. Discuter le nombre de tels points selon les valeurs de a.

> Appeler le professeur pour lui montrer la figure
> et les premiers résultats

Dans cette question, on prend $a=2$ et on s'intéresse à la somme $OM+DM$.

3. Sur la figure, faire afficher la somme $OM+DM$.

4. Existe-t-il des points de $[BC]$ pour lesquels la somme $OM+DM$ paraisse minimale ? Quelle est dans ces cas la distance BM ?

5. Expliquer le résultat (on pourra considérer le point O_1, symétrique de O par rapport à la droite (BC)).

> Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

6. On revient au cas général. Est-il possible de trouver une valeur de a pour laquelle le point M minimisant la somme $OM+DM$ soit tel que les droites (CM) et (OM) soient perpendiculaires ?

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°02

Épaisseur entre deux courbes

Sur une figure, en utilisant un repère orthonormal, placer la courbe représentative Γ de la fonction logarithme népérien et la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle.

1. Soit A un point quelconque de la courbe Γ. Représenter la tangente à Γ en A. On note T_A cette droite. Quelle est le coefficient directeur de T_A ?

2. Déterminer graphiquement un point B de la courbe $\mathcal{C}$ en lequel la tangente T_B à $\mathcal{C}$ soit parallèle à T_A.

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point B. Utiliser cette information pour refaire la figure.

4. Comment évolue la distance entre les droites T_A et T_B lorsque le point A décrit la courbe Γ ? En observant le graphique, pour quels points A les droites T_A et T_B sont-elles identiques ? Pour quel point A leur distance atteint-elle un maximum relatif ?

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

5. On considère à présent les points R, de couple de coordonnée (1, 0), et S, de couple de coordonnées (0, 1). Une sécante variable coupe la courbe Γ en un point M et la courbe C en un point N. Illustrer graphiquement le fait que MN > RS. On dira que la distance RS est la distance entre les deux courbes Γ et C.

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°03

Triangles M-associés

Soit ABC un triangle et M un point du plan.
On note A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
On note M_1, M_2 et M_3 les symétriques respectifs du point M par rapport aux points A', B' et C'.
Soit G le centre de gravité du triangle ABC et K le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les points M, G et K ?

Appeler le professeur pour lui soumettre cette conjecture

2. Démontrer que G est le milieu de [MK].
3. Les supports des côtés des triangles ABC et $M_1M_2M_3$ sont-ils deux à deux parallèles ? Établir cette propriété.

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

4. Montrer que les droites (AM_1), (BM_2) et (CM_3) sont concourantes.

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°04

Suite d'intégrales

À chaque entier naturel n, on associe la fonction f_n, définie sur l'intervalle [0, 1] par :

$f_0(x) = \sqrt{3+x}$

$f_n(x) = x^n\sqrt{3+x}$ pour $n > 0$.

On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal.

1. Construire les courbes correspondant à diverses valeurs de n (on réalisera une figure animée). Quels sont les points d'intersection de deux courbes C_n et C_p correspondant à deux valeurs distinctes du paramètre ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x$.

a. Selon la représentation graphique, quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (a_n) ?

b. Montrer que la suite (a_n) est convergente de limite 0.

Appeler le professeur pour lui montrer les premiers résultats

3. On considère la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n par : $b_n = na_n$.

a. Quelle conjecture la figure incite-t-elle à émettre quant au comportement de la suite (b_n) ?

b. On appelle Γ_n la courbe représentative de la fonction g_n égale au produit de f_n par n, B_n le point d'abscisse 1 de Γ_n, D_n le point d'intersection de la tangente en B_n à Γ_n avec l'axe des abscisses et I le point de couple de coordonnées (1,0). Représenter le triangle $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{I}$ sur la figure. Quelle est l'aire de ce triangle ? Cette constatation modifie-t-elle la conjecture ?

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

4. On donne l'encadrement : pour tout x de l'intervalle [0, 1], $2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x) \leqslant \sqrt{3+x} \leqslant 2$.

Calculer la limite de la suite (b_n).

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°05

Cercle d'Apollonius

1. Soit A et B des points du plan et k un nombre réel positif strictement supérieur à 1. On s'intéresse à l'ensemble Γ des points M du plan pour lesquels $\dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}} = k$.

a. En écrivant la définition sous la forme $\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} - k\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + k\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right) = 0$, et en notant respectivement I et J les barycentres des systèmes $\left\{(\mathrm{A},\ k),(\mathrm{B},\ 1)\right\}$ et $\left\{(\mathrm{A},\ -k),(\mathrm{B},\ 1)\right\}$ montrer que l'ensemble cherché est un cercle. En donner le centre – qu'on notera O – et le rayon.

b. Faire une figure.

Appeler le professeur pour lui soumettre ces travaux

2. Soit M un point de Γ, distinct de I et J. En faisant varier le point M, émettre une conjecture sur le rôle des demi-droites [MI) et [MJ) pour le triangle MAB. Démontrer le résultat envisagé (on pourra considérer la parallèle à (MA) passant par B et son point d'intersection avec (MI).

3. Soit P le point de contact avec Γ d'une des tangentes à Γ issues de B. Quelle est la nature du triangle BPA ?

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°06

Logarithmes télescopiques

On considère la suite (u_n) définie sur **N*** par : $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. On lui associe les suites (P_n) et (S_n) respectivement définies par :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1} \times u_n \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_{n-1}) + \ln(u_n)$$

1. À l'aide d'une feuille automatisée de calcul, donner les 30 premiers termes de chacune des suites $(u_n), (P_n)$ et (S_n).

2. Quel comportement et quelle limite éventuelle ces résultats laissent-ils imaginer pour chacune de ces suites ?

Appeler le professeur pour lui montrer ces premiers résultats

3. Représenter le nuage des 30 points de couples de coordonnées (n, P_n).

a. En déduire une expression possible de P_n en fonction de *n*.

b. Comparer ce résultat avec les valeurs fournies par la feuille de calcul.

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

4. Achever la preuve par une démonstration par récurrence.

5. Conclure quant à la limite de la suite S_n.

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°07

Suite définie par une relation de récurrence

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel *n* non nul $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}\cdot$

1. Déterminer les 20 premiers termes de la suite.

2. Quelle semble être la nature de la suite (d_n) définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$?

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières études

3. Représenter le nuage de points de couples de coordonnées (n, u_n).

4. Émettre une conjecture sur une expression possible de u_n en fonction de *n*. En quoi la réponse à la deuxième question renseigne-t-elle sur les coefficients convenables ?

5. Démontrer par récurrence les résultats annoncés.

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°08

Histoire de médianes

Une unité de longueur est donnée. On considère deux point A et B du plan tels que AB = 1. Soit A' le symétrique de A par rapport à B. Soit B' le symétrique de B par rapport à A. Soit Γ le cercle de diamètre [A'B'].

Un point M varie sur le cercle Γ.

1. Construire sur une figure les médianes issues de A et B du triangle ABM. Quelle semble être la position relative de ces deux droites ?

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

2. On appelle G le centre de gravité du triangle ABM. Quel semble être le lieu du point G lorsque M décrit le cercle Γ ? Construire ce lieu sur la figure.

3. Démontrer les deux propriétés énoncées en 1. et 2.

4. Quelles sont les longueurs AM et BM lorsque le triangle ABM est rectangle en A ?

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

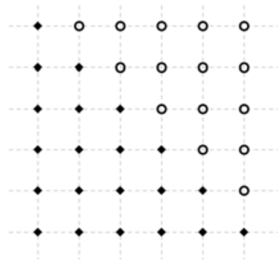
Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°09 Spé

Des carrés triangulaires

La somme des n premiers entiers non nuls $T_n = 1+2+3+...+(n-1)+n$ est le $n$ième nombre triangulaire, dont la somme avec celui qui le précède est un carré, comme le montre la figure ci-contre.



1. Rappeler l'expression de T_n en fonction de n, et justifier l'affirmation précédente.

2. Y a-t-il des nombres triangulaires qui soient eux-mêmes des carrés ? Examiner cette question en réalisant un tableau des valeurs de T_n pour les valeurs de n comprises entre 0 et 100.

Appeler le professeur pour lui montrer cette première réalisation

3. On cherche maintenant des entiers n et p tels que : $\frac{n(n+1)}{2} = p^2$.

Montrer que le couple (n, p) est solution, si et seulement si on peut trouver des entiers a et b tels que :

$n = 2a^2$ et $b^2 = 2a^2 + 1$ ou $n = a^2$ et $2b^2 - 1 = a^2$.

4. Construire la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$. Y a-t-il sur cette courbe des points à coordonnées entières ? Fournissent-ils une solution au problème ?

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°10

« Super-Pythagore »

On appelle tétraèdre trirectangle un tétraèdre dont trois faces sont des triangles rectangles. On considèrera que les trois angles droits ont le même sommet (peut-il en être autrement ?)

1. En utilisant un logiciel de géométrie dans l'espace, représenter le tétraèdre OABC, dans lequel O est l'origine des axes de coordonnées, et A, B et C des points situés respectivement sur l'axe des abscisses, sur l'axe des coordonnées et sur l'axe des cotes. On attribuera à chacun des points A, B et C une coordonnée positive variable, les deux autres étant nulles.

2. Faire afficher l'aire du triangle ABC.

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

3. Comparer le carré de l'aire de ABC avec la somme des carrés des aires des triangles OAB, OAC et OBC. Le résultat subsiste-t-il quand les coordonnées de A, B et C varient ?

4. Selon le mathématicien Héron d'Alexandrie, si on désigne par a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle et par p son demi-périmètre ($p=\dfrac{a+b+c}{2}$), l'aire S de ce triangle est donnée par $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

En prenant (a, 0, 0), (0, b, 0) et (0, 0, c) comme triplets de coordonnées des points A, B et C, calculer les aires des faces du tétraèdre et démontrer le résultat précédent.

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°11

Le théorème du papillon

On considère un cercle de centre O, une corde [PQ] de ce cercle. Soit M le milieu de [PQ]. Deux droites quelconques passant par M déterminent sur le cercle deux cordes [AB] et [CD]. On suppose que les points A et C appartiennent au même arc d'extrémités P et Q. Les cordes [AD] et [BC] coupent le segment [PQ] en E et F.

1. Faire une figure dynamique.

2. Comparer les distances EM et FM. Quelle conjecture peut-on faire sur la position de M par rapport à E et F ?

Appeler le professeur pour lui montrer la figure

3. On considère les projetés orthogonaux G et H de E sur (AM) et (DM) respectivement, les projetés orthogonaux I et J de F sur (CM) et (BM) respectivement. Identifier sur la figure quatre paires de triangles semblables (comme par exemple AEG et CFI).

4. En posant PM = a, ME = x et MF = y, montrer que $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{\text{AE}\cdot\text{ED}}{\text{CF}\cdot\text{FB}} = \dfrac{\text{PE}\cdot\text{EQ}}{\text{PF}\cdot\text{FQ}}$.

En déduire que M est le milieu de [EF].

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°12

De Pascal à Catalan

1. Utiliser une feuille automatisée de calcul pour y faire figurer les coefficients du binôme $\binom{n}{p}$ pour les valeurs de n allant de 0 à 20. Observer les ter mes médians des lignes d'indice pair. Permettent-il de conjecturer que $\binom{2n}{n}$ est un multiple de $n+1$?

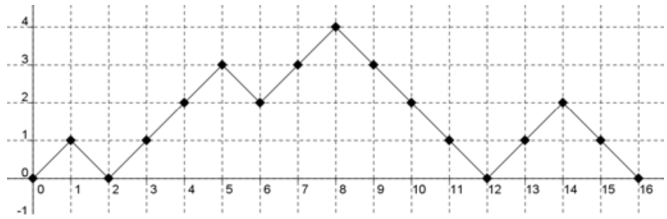
2. On ch oisit n boules parmi $2n$, dont $n+1$ sont blanches et $n-1$ sont noires. En écrivant toutes les compositions possibles des combinaisons de n boules, justifier que :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot \binom{n-1}{n-k}.$$

3. Montrer que chaque terme de cette somme est un multiple de $n+1$. Conclure.

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

4. On appelle chemin de Dyck de longueur $2n$ toute suite (s_n) de points du plan dont les coo rdonnées sont des entiers positifs, (0, 0) pour le premier et ($2n$, 0) pour le dernier, chacun étant déduit du précédent par la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ ou $\vec{i} - \vec{j}$.



On note c_n le nombre de chemins de Dy ck de longueur $2n$. Par convention, $c_0 = 1$. On note $k(C)$ l'abscisse du second point d'ordonnée nulle d'un chemin de Dyck C.

a. Justifier que $k(C)$ est pair.

b. Justifier que le nombre de chemins de longueur $2n$ tels que $k(C) = 2n$ est égal à c_{n-1}, puis que le nombre de chemins de longueur n tels que $k(C) = 2p$ (où $1 \leqslant p < n$) est égal à $c_{p-1} \cdot c_{n-p}$

c. En déduire que $c_n = \sum_{p=1}^{n-1} c_{p-1} \cdot c_{n-p}$. Faire écrire les premiers termes de la suite (c_n) sur la feuille de calcul et comparer avec la suite des $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Ces nombres sont appelés nombres de Catalan.

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°13 Spé

À la recherche d'un « petit » diviseur premier

On considère la fonction f qui à tout entier relatif n associe l'entier :

$$f(n) = n^2 + 5n + 23$$

1. À l'aide d'une feuille automatisée de calcul, calculer les valeurs prises par $f(n)$ pour tous les entiers compris entre -20 et 20.

2. Certaines des valeurs calculées coïncident. Lesquelles ?

3. Combien suffit-il d'examiner de termes consécutifs de la suite des valeurs $f(n)$ pour prouver qu'il n'existe aucun terme de cette suite divisible par 2 ? par 3 ? par 5 ?

Appeler le professeur pour lui montrer ces premiers résultats

4. Trouver un entier n tel que $f(n)$ ne soit pas premier.

5. Quel est le plus petit entier premier p pour lequel il existe un entier n tel que p divise $f(n)$?

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

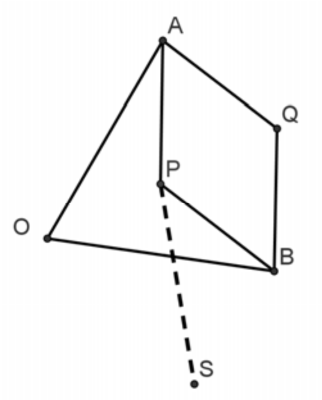
Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°14

L'inverseur de Peaucellier

L'ingénieur Peaucellier conçut en 1864 un appareil « permettant de transformer les mouvements circulaires en mouvements rectilignes ». L'appareil est composé de tiges articulées : les tiges [OA] et [OB] ont la même longueur a et les tiges [AP], [AQ], [BP] et [BQ] ont la même longueur b, inférieure à a. Le point P peut être assujetti à demeurer à une distance donnée d'un point S.

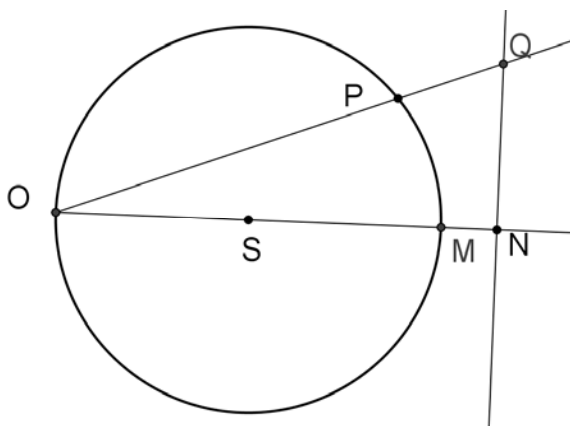


Préliminaire : En utilisant la figure ci-contre, montrer que les points O, P et Q sont alignés et que, lorsque la position des tiges varie, le produit $\mathrm{OP}.\mathrm{OQ}$ ne varie pas.

1. Reproduire à l'aide d'un logiciel de géométrie la figure ci-contre. Une unité de longueur étant fixée, on commencera par placer les points O et S (la distance OS étant égale à 4), le point P puis les points A et B (on prendra $a = 5$ et $b = 3$) puis le point Q. Comment semble se déplacer le point Q lorsque P varie sur le cercle de centre S passant par O ?

Appeler le professeur pour lui montrer cette animation

2. On donne deux points distincts O et S et un nombre réel positif k. On considère le cercle Γ de centre S passant par O et le point M, diamétralement opposé à O sur ce cercle.



Soit N le point de la demi-droite [OS) tel que $\mathrm{OM}.\mathrm{ON} = k^2$.

Soit P un point quelconque de Γ. Montrer que le point d'intersection de la droite (OP) avec la perpendiculaire à (OS) passant par N vérifie : $\mathrm{OP}.\mathrm{OQ} = k^2$.

Dans la figure ci-contre, le point N est à l'extérieur du disque de circonférence Γ. Le résultat obtenu subsiste-t-il si N est à l'intérieur ? et si N = M ?

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°15

Théorème de Pappus

Théorème de Ménélaüs

On considère un triangle ABC et un point M situé sur la droite (BC). Une droite variable Δ passant par M coupe les droites (CA) et (AB) respectivement en N et P.

1. Faire une figure et faire afficher le produit $p = \frac{\text{MB}}{\text{MC}} \times \frac{\text{NC}}{\text{NA}} \times \frac{\text{PA}}{\text{PB}} \cdot$ Qu'observe-t-on lorsque la droite Δ varie ?

2. Soit h_A, h_B et h_C les distances respectives des points A, B et C à la droite Δ. Montrer que $\frac{\text{MB}}{\text{MC}} = \frac{h_B}{h_C} \cdot$

En écrivant deux égalités analogues, conclure à une condition nécessaire pour que trois points situés sur les supports des trois côtés d'un triangle soient alignés.

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

Théorème de Pappus

La condition évoquée ci-dessus n'est pas suffisante. Comme pour ce qu'il est convenu d'appeler la réciproque du théorème de Thalès, il faut trouver un moyen de tenir compte de l'ordre des points alignés.

3. Le théorème de Ménélaüs permet de construire une preuve de la propriété suivante, qu'il est demandé d'illustrer à l'aide d'une figure animée :

« Soit trois points A, C et E situés sur une droite, et trois autres points B, D, F situés sur une autre droite. Si les droites (AB) et (DE) se coupent en M, les droites (CD) et (FA) en N et les droites (EF) et (BC) en P, alors les points M, N et P sont alignés ».

Appeler le professeur pour lui soumettre cette figure

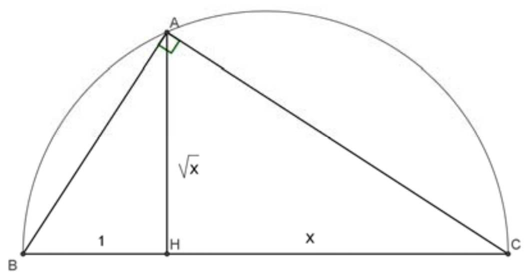
Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°16

Nombres constructibles

Descartes rompt avec la tradition, qui attachait une « dimension » à un nombre, quand il propose cette construction de la racine carrée d'un nombre positif x, représenté par le segment [CH] sur la figure ci-contre où le segment [BH] représente 1. Le point A y est défini comme l'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par H avec le demi-cercle de diamètre [BC].

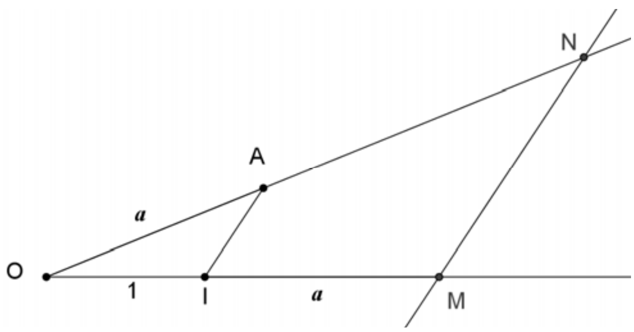


1. Justifier l'égalité $\mathrm{AH} = \sqrt{x}$.

2. Une construction analogue permet-elle de construire le nombre a^2 , le réel positif a étant donné et représenté par un segment ?

3. La figure ci-contre utilise l'homothétie. Quelle est la longueur du segment AN ?

4. Avec les mêmes données (O, A et I), construire un segment dont la longueur soit $\dfrac{1}{a}$

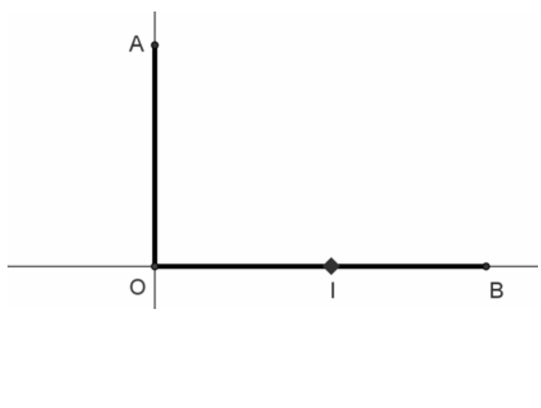


Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

5. On donne, sur la figure ci-contre, les points O, A et B, sommets d'un triangle rectangle en O de côtés a et b. Le point I est tel que OI = 1.
Construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent a^2 et b^2.

Construire ensuite le nombre $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

On rappelle que $\sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}}$.



Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

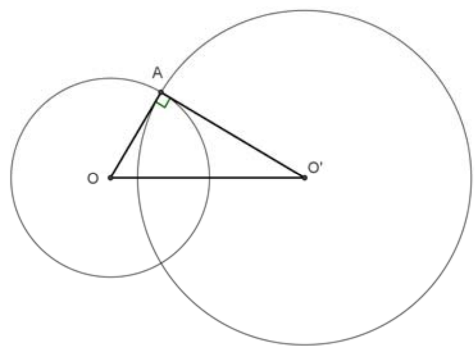
Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°17

Cercles orthogonaux

On dit que les cercles *C* et *C'*, de centres respectifs O et O', et dont A est un point d'intersection, sont orthogonaux, si le triangle OAO' est rectangle en A.



1. On se place dans le plan rapporté à un repère orthonorm al. Les ensembles de points définis par les équations suivantes :
$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ et $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$
sont-ils des cercles orthogonaux ?

2. Combien existe-t-il de cercles de centre donné orthogonaux à un cercle donné ?

3. On donne un cercle *C* de centre O et de rayon R, un point M de *C* et un point P du plan, extérieur au disque de centre O et de rayon R. Construire un cercle passant par M et P orthogonal au cercle *C*.

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

3. En utilisant une ani mation bien choisie de la figure précédente, émet tre une conj ecture concernant l'ensemble des centres des cercles passant par P orthogonaux à *C*.

4. Montrer que tous les cercles éléments de l'ensemble précédent passent par un même point distinct de P.

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°18

Oscillations affines

Cet exercice prend un intérêt supplémentaire s'il est proposé avec une programmation de la fonction f.

On considère la fonction *f*, définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=2(1-x) \text{ si } x\in[0,1[\,,\ f(x)=x-1 \text{ si } x\in[1,2[\text{ et } f(x)=\frac{1}{2}\big(f(x-2)+f(x-1)\big) \text{ si } x\geqslant 2\ .$$

1. Représenter graphiquement la restriction de la fonction f à l'intervalle [0, 4].

2. Démontrer que la fonction *f* est affine sur tout intervalle d'extrémités deux entiers positifs consécutifs. Émettre une conjecture sur l'allure générale de la courbe représentative de *f*.

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

On s'intéresse à l'équation $f(x)=f(x+1)$. Cette équation est notée (E) dans la suite.

3. Quelles sont les solutions de (E) sur l'intervalle $[0,2[$?

4. Le graphique réalisé à la première question permet-il d'imaginer l'ensemble des solutions de l'équation (E) ? Résoudre cette équation.

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

5. La fonction *f* admet-elle une limite en $+\infty$?

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°19

Un polynôme bien maîtrisé

Les fonctions polynômes sont utilisées pour approcher d'autres fonctions. C'est pourquoi connaître des résultats généraux sur leur comportement est important. Dans cet exercice, on cherche une condition nécessaire sur le coefficient du terme du troisième degré pour qu'une fonction polynôme de degré 3 reste en valeur absolue majorée par 1 sur l'intervalle [−1, 1].

À tout nombre réel α on associe la fonction f_α définie sur $[-1,1]$ par $f_\alpha(x) = x^3 - \alpha x$.

1. Construire les représentations graphiques de f_α obtenues en faisant varier α. Identifier, sur ces représentations graphiques, le minimum et le maximum de f_α. Sont-ils, pour toute valeur de α, atteints en 1 ou en −1 ?

2. Pourquoi peut-on noter $[-m(\alpha), m(\alpha)]$ l'image de l'intervalle [−1, 1] par f_α ?

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

3. Étudier la fonction f_α. Pour quelles valeurs de α la dérivée de f_α change-t-elle de signe sur $[-1,1]$? Pour quelles valeurs de α a-t-on $-m(\alpha) < f_\alpha(1) < m(\alpha)$?

4. Représenter graphiquement la fonction $m : \alpha \mapsto m(\alpha)$ et la fonction $n : \alpha \mapsto -m(\alpha)$. Pour quelle valeur de α peut-on affirmer que, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$, $|f_\alpha(x)| \leqslant \frac{1}{4}$?

5. Donner une condition nécessaire sur les coefficients a et b pour que la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = ax^3 + bx$ ne prenne que des valeurs comprises entre −1 et 1.

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

6. Donner une condition nécessaire pour qu'une fonction polynôme du troisième degré P ne prenne, sur l'intervalle $[-1,1]$ que des valeurs comprises entre −1 et 1. On pourra considérer la fonction Q définie sur $[-1,1]$ par $Q(x) = \frac{1}{2}\big(P(x) - P(-x)\big)$.

Académie de Versailles **Année 2010-2011**

Épreuve pratique de mathématiques en terminale S

Sujet n°20

Puissances entières de même longueur

On considère la fonction log, définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $\log(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Cette fonction est appelée fonction logarithme décimal. Représenter dans un même repère les fonctions ln et log. Donner les valeurs de $\log(10)$, $\log(100)$, $\log(1000)$. Justifier la proposition suivante :

Pour tout réel strictement positif x, pour tout réel y, $y=\log(x) \Leftrightarrow x=10^{y}$.

Appeler le professeur pour lui montrer ces premières réalisations

1. Sur une feuille de calcul, faire apparaître la liste des 50 premières puissances de 2 (de 2^0 à 2^{49}). Dans la liste, on constate que plusieurs puissances successives de 2 s'écrivent avec le même nombre de chiffres. Combien ?

2. En est-il de même pour les puissances successives de 3 ? de 9 ?

3. On se donne un entier non nul n. Justifier que les entiers p pour lesquels $10^{n-1} \leqslant 2^p < 10^n$ sont ceux satisfaisant : $\dfrac{n-1}{\log 2} \leqslant p < \dfrac{n}{\log 2}$.

4. Peut-il y avoir strictement moins de trois puissances successives de 2 s'écrivant avec le même nombre de chiffres ? Peut-il y en avoir strictement plus de 4 ?

5. Que représente la partie entière du logarithme décimal d'un entier ?

Appeler le professeur pour lui exposer ces travaux

6. Trouver deux entiers m et n distincts de 0 tels que 9^m et 9^{m+1} d'une part, 9^n et 9^{n+1} d'autre part, s'écrivent avec le même nombre de chiffres.