Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 1

Des polygones de même aire

Soit O et C deux points du plan tels que OC = 5. De part et d'autre de la droite (OC), on construit un triangle OCD rectangle isocèle en O et un rectangle OCBA tel que OA = 1.
Soit M un point du segment [OC].
La parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) et (DC) respectivement en E et F.
On cherche à déterminer la position du point M sur le segment [OC] pour que le rectangle OMEA et le triangle MCF aient la même aire.

1. Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.
2. Quelle semble être la nature du triangle MCF ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture

3. a) Faire afficher la longueur OM ainsi que les aires du quadrilatère OMEA et du triangle MCF.
   b) En faisant varier la position du point M, chercher une valeur approchée de OM à 0,1 près dans le(s) cas où OMEA et MCF ont la même aire. Donner une valeur approchée de l'aire correspondante à 0,01 près.

> Appeler l'examinateur pour lui exposer la conclusion

4. Quelle est la nature du triangle MCF ?
5. On pose x = OM.
   a) Démontrer que si les aires de OMEA et de MCF sont égales alors x est solution de l'équation $(x-6)^2-11=0$.
   b) Résoudre cette équation puis répondre au problème posé.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 2

Un trapèze et un triangle de même périmètre

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 6. Soit M un point du segment [AB]. La parallèle à (BC) passant par M coupe le segment [AC] en N.
On cherche à déterminer la position du point M sur le segment [AB] pour que le triangle AMN et le trapèze MNCB aient le même périmètre.

1. Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.

2. Faire afficher la longueur AM, le périmètre p_1 du triangle AMN et le périmètre p_2 du trapèze MNCB.

> Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure construite et les affichages réalisés

3. En faisant varier la position du point M, chercher une valeur approchée à 0,1 près de :
   a) AM dans le(s) cas où $p_1 = p_2$.
   b) du rapport des aires des triangles ABC et AMN dans le cas où $p_1 = p_2$. Réaliser des affichages permettant de conforter la conjecture émise.

> Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et une aide éventuelle

4. On pose x = AM.
   a) Exprimer p_1 et p_2 en fonction de x, résoudre l'équation $p_1 = p_2$ et conclure.
   b) Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC. Quel est le coefficient de réduction dans le cas où $p_1 = p_2$?
   En déduire la valeur exacte du rapport des aires des triangles ABC et AMN dans le cas où $p_1 = p_2$.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 3

Triangle d'aire minimale

Soit EFGH un carré de côté 10 et I le milieu du segment [GH].
Soit M un point du segment [EH] et N le point de [EF] tel que FN = EM.
Le but de cet exercice est d'étudier les variations de l'aire du triangle MNI lorsque M se déplace sur le segment [EH].

1. Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.

2. a) Faire afficher l'aire du triangle MNI.
   b) Émettre une conjecture sur les variations de l'aire du triangle MNI lorsque M se déplace sur le segment [EF].

> Appeler le professeur pour une vérification de la figure construite et des conjectures émises.

3. On pose EM = m et on note $\mathscr{A}(m)$ l'aire du triangle MNI.
   a) Soit P le point de coordonnées $(m, \mathscr{A}(m))$ dans un repère orthonormal.
   Faire apparaître l'ensemble des points P lorsque M parcourt le segment [EH]. Faire une conjecture sur le sens de variation de la fonction qui, à tout nombre m de l'intervalle [1,10] associe $\mathscr{A}(m)$.
   b) Chercher une valeur approchée à 0,1 près du minimum de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que de la valeur m_0 de m pour lequel il est atteint.

> Appeler le professeur pour lui montrer le lieu du point P et conforter vos conjectures.

4. a) Exprimer l'aire $\mathscr{A}(m)$ du triangle MNI en fonction de m.
   b) Montrer que pour tout réel m compris entre 0 et 10, $\mathscr{A}(m) - \dfrac{175}{8} = \dfrac{1}{2}\left(m - \dfrac{15}{2}\right)^2$.
   Quelle est l'aire minimale du triangle MNI lorsque M se déplace sur le segment [EH] et à quelle longueur cette aire correspond-elle ?

> Appeler le professeur pour une aide éventuelle.

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 4

Calculs dans un repère

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A le point de coordonnées (– 3, – 3) et B, C, D les points tels que ABCD soit un carré de côté 6 et de centre O.
On appelle :
- E le centre de gravité du triangle ADB,

- M le point tel que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DM}$,

- N le symétrique de C par rapport à B,

- P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$,

- Q est le point d'intersection des droites (AB) et (ME).

Le but de cet exercice est d'étudier la position relative des points P, Q *et* N.

1. a) Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.

> Appeler le professeur pour une vérification de la figure construite et une aide éventuelle.

   b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la position relative des points P, Q et N ?
   c) Afficher les coordonnées des points E, M, N, P et Q et le coefficient directeur de la droite (ME).

2. a) Justifier les égalités vectorielles : $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$
   b) En déduire les coordonnées des points N et P. Est-ce en accord avec les coordonnées affichées ?

   c) On admet que la droite (ME) a pour équation $y = -1{,}4x - 2{,}4$. Calculer les coordonnées de Q.

> Appeler le professeur pour une vérification et la démarche envisagée pour la question suivante.

   d) Démontrer que les points P, Q et N sont alignés.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 5

Une droite pivot

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). Soit A le point de coordonnées (–1, 0) et d la droite parallèle à (OJ) passant par A.
Soit M un point variable de la demi-droite [OI), on appelle N le point d'intersection des droites d et (MJ).

1. a) Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.
   b) Faire afficher l'aire du triangle AMN.
   c) Émettre une conjecture sur les variations de l'aire du triangle AMN lorsque M se déplace sur la demi-droite [OI).

Appeler le professeur pour lui montrer la figure obtenue

2. On pose OM = x et on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle AMN.
   a) Soit P le point de coordonnées (x, $\mathscr{A}(x)$) dans le repère (O, I, J). Faire apparaître l'ensemble des points P lorsque M parcourt la demi-droite [OI).
   b) Faire une conjecture sur le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
   c) Donner une valeur approchée du minimum de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que de la valeur x_0 de x pour lequel il est atteint.

Appeler le professeur pour conforter cette conjecture

3. Exprimer ON puis $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.
   a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif,
   $$\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(1) = \frac{(x-1)^2}{2x}$$
   b) Quelle est l'aire minimale du triangle AMN lorsque M se déplace sur la demi-droite [OI) et quelle est la longueur OM dans ce cas ?

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 6

Droite d'Euler

Soit ABC un triangle, O le centre du cercle Γ circonscrit à ce triangle, G son centre de gravité et H son orthocentre.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la position relative de ces trois points.

1. Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure obtenue et une aide éventuelle.

2. Construire la droite (OH) et afficher les longueurs OG et GH. Déplacer les sommets A, B et C. Quelles conjectures peut-on émettre sur les points O, G et H ?

3. On appelle A' le milieu du segment [BC] et D le point diamétralement opposé à A sur le cercle Γ.

   a) Quelle semble être la nature du quadrilatère BDCH ?

   b) Que semble représenter G pour le triangle AHD ?

> Appeler le professeur pour une vérification des conjectures et une aide éventuelle.

4. a) Démontrer que le quadrilatère BDCH est un parallélogramme.

   b) En déduire que G est le centre de gravité du triangle AHD.

   c) On admet que $AH = 2OA'$. Valider les conjectures émises à la question 2.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 7

Un carré parfait

Soit n un entier naturel et $N = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$.

1. À l'aide d'un logiciel, organiser le calcul de N et de $\sqrt{N}$ pour n entier naturel inférieur ou égal à 20.
   a) Quelle conjecture peut-on émettre sur N ?
   b) Représenter par un nuage de points de coordonnées $\left(n, \sqrt{N}\right)$.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle

2. a) On pose $a = n(n + 3)$ et $b = (n + 1)(n + 2)$.
   Exprimer b puis N en fonction de a. La conjecture émise à la question 1. a) est-elle validée ?

Appeler l'examinateur pour une aide éventuelle

   b) Montrer que les points de coordonnées $\left(n, \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}\right)$ appartiennent à une parabole dont on donnera une équation. Vérifier que les points du nuage sont des points de cette courbe.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 8

Construction d'une parabole point par point

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'origine O. Soit a un réel strictement positif et H le point de coordonnés (a, 0). Soit d la droite d'équation $x = a$, N le point de d d'ordonnée – 1 et M le point d'intersection de d avec la perpendiculaire à (ON) passant par O.

1. Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.

> Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure obtenue

2. a) Afficher les longueurs HM et OH.
   Quelle conjecture peut-on émettre ? Afficher un calcul permettant de conforter votre conjecture.
   b) Faire apparaître l'ensemble décrit par le point M lorsque a varie.
   Quelle semble être la courbe à laquelle appartient le point M ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

3. a) Démontrer que $\widehat{\mathrm{ONH}} = \widehat{\mathrm{MOH}}$.
   b) On pose $t = \widehat{\mathrm{ONH}} = \widehat{\mathrm{MOH}}$. En exprimant $\tan t$ de deux façons différentes, démontrer que :
   $\mathrm{OH}^2 = \mathrm{HM} \times \mathrm{HN}$. En déduire les coordonnées de M en fonction de a.
   c) Valider les conjectures émises à la question 2 b).

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 9

Le quadrilatère de Varignon

Soit ABCD un quadrilatère quelconque. On appelle I, J, K, L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. Réaliser une figure en utilisant un logiciel de géométrie.

2. a) Déplacer les points A, B, C, D. Quelle semble être la nature du quadrilatère IJKL ?

   b) Émettre une conjecture concernant une condition suffisante pour que le quadrilatère IJKL soit :
   - un rectangle,
   - un losange,
   - un carré.

> Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

3. a) Démontrer la conjecture émise à la question 2. a)

> Appeler le professeur pour une aide éventuelle.

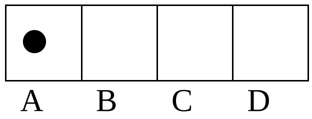
   b) Démontrer l'une des trois conjectures émises à la question 2.b).

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 10

Un jeu de pile ou face



Un pion est placé sur la case A d'un chemin contenant 4 cases.
Le jeu consiste à lancer trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
Si elle tombe sur Pile, le pion avance d'une case vers la droite, si elle tombe sur Face, le pion ne bouge pas.
À chacun des trois lancers, on associe + 1 si la pièce est tombée sur Pile et 0 si la pièce est tombée sur Face.

1. À l'aide d'un logiciel, simuler 1 000 jeux (on rappelle qu'un jeu se compose de trois lancers).
   a) Faire afficher les éléments suivants :

Rang du jeu	Lancer n°1	Lancer n° 2	Lancer N° 3	N° de la case d'arrivée
1				
2				
…				
1 000				

   b) Faire afficher, pour la simulation effectuée, les fréquences d'arrivée sur les cases A, B, C et D.

> Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la simulation et le tableau

2. Dessiner un arbre représentant les différentes réalisations d'un jeu.

> Appeler le professeur pour une aide éventuelle.

   Déterminer la probabilité des événements :
   A : « Le pion reste sur la case A » ;
   B : « le pion arrive sur la case B » ;
   C : « le pion arrive sur la case C » ;
   D : « le pion arrive sur la case D ».

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 11

Jeu équitable ou non ?

On propose à Pierre le jeu suivant : On lance deux fois de suite un dé parfaitement équilibré. On note dans l'ordre les nombres x et $\boldsymbol{y}$ de points marqués sur la face supérieure**.** Pierre gagne s'il y a au plus 3 points d'écart entre x et $2y$.
Exemple : Si le premier lancer donne 2 et le deuxième 3, on a $x = 2$, $y = 3$ et $x - 2y = -4$**.** L'écart est de 4 points et Pierre a perdu.

Pierre se demande si le jeu est équitable ou non, c'est-à-dire s'il a une chance sur deux de gagner.

1. a) À l'aide d'un logiciel, simuler 1 000 jeux (on rappelle qu'un jeu se compose de deux lancers) en faisant afficher les éléments suivants :

Rang du jeu	x	y	Ecart entre x et $2y$	Jeu gagnant ou perdant
1				
2				
…				
1 000				

   b) Faire afficher, pour la simulation effectuée, la fréquence des jeux gagnants puis conjecturer une réponse à la question posée.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la simulation et une aide éventuelle.

2. a) Réaliser un tableau à double entrée **ou** un arbre représentant les différents cas possibles pour un seul jeu.

Appeler l'examinateur pour une aide éventuelle.

   b) Déterminer la probabilité de gagner à ce jeu.

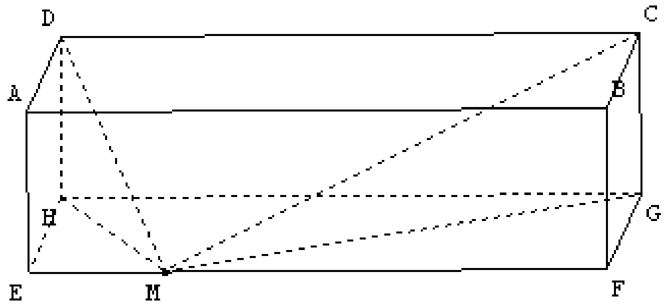
Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 12

Calculs d'angles dans un pavé droit

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 10, AD = AE = 3.
Soit M un point du segment [EF].
Le but de cet exercice est de trouver les positions de M telles que le triangle DMC soit rectangle en M et celles où le triangle HMG est rectangle en M.



1. Réaliser la figure en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur en cas de difficulté.

2. Quelle semble être la nature des triangles DHM et CGM ? Faire afficher les mesures qui permettent de conforter ces conjectures.

3. Faire afficher la longueur EM ainsi que les mesure en degré des angles $\widehat{DMC}$ et $\widehat{HMG}$
   a) Pour quelle(s) position(s) de M le triangle HMG semble-t-il être rectangle en M ?
   b) Pour quelle(s) position(s) de M le triangle DMC semble-t-il être rectangle en M ?

Appeler l'examinateur pour lui exposer les conjectures faites et la démarche envisagée pour les questions à venir.

4. On admet que les triangles DHM et CGM sont rectangles, respectivement en H et G.
On pose EM = m
   a) Exprimer HM^2, MG^2, DM^2 puis MC^2 en fonction de m.
   b) Démontrer que le triangle DMC est rectangle en M si et seulement si m est un réel compris entre 0 et 10, solution de l'équation $(m-5)^2 = 7$.

Appeler le professeur pour une aide éventuelle.

Résoudre cette équation et justifier la conjecture émise à la question 2 b).

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 13

Composition d'une famille de trois enfants

Dans cet exercice, on suppose que :
- chaque naissance a autant de chances d'être celle d'un garçon ou celle d'une fille,
- le sexe d'un enfant d'une famille ne dépend pas du sexe des enfants précédents.

Une famille de trois enfants peut être composée soit de trois filles, soit de trois garçons, soit de deux garçons et une fille soit de deux filles et un garçon. Antoine pense qu'il y a une chance sur deux pour que les trois enfants soient du même sexe.

3. a) À l'aide d'un logiciel, simuler 1 000 compositions de familles de trois enfants en faisant afficher les éléments suivants :

Famille n°	1^{er} enfant	$2^{ème}$ enfant	$3^{ème}$ enfant	Nombre de filles	Nombre de garçons
1					
2					
…					
1 000					

b) Calculer la fréquence des familles ayant trois enfants du même sexe lors de cette simulation.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la simulation et une aide éventuelle.

Que pensez-vous de la conjecture d'Antoine ?

2. Dessiner un arbre représentant les différentes compositions possibles d'une famille de trois enfants.

Appeler le professeur pour une aide éventuelle.

Déterminer la probabilité d'avoir trois enfants et valider ou infirmer la conjecture d'Antoine.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 14

Foyer et directrice d'une parabole

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

On appelle F le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ et d la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$.

Soit M un point de $\mathscr{P}$ distinct de O et H son projeté orthogonal sur d.

1. Réaliser la figure en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.
   Afficher les longueurs MF et MH. Quelle conjecture peut-on faire ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. a) Construire la médiatrice $\mathscr{D}$ du segment [FH] ainsi que la perpendiculaire Δ à $\mathscr{D}$ passant par M. Elle coupe l'axe des ordonnées en K. Soit G un point de la demi-droite [HM) extérieur au segment [HM]

   b) Que peut-on conjecturer sur les angles $\widehat{\text{GMK}}$ et $\widehat{\text{KMF}}$?

> Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures

3. a) Démontrer que si le point M d'abscisse m appartient à $\mathscr{P}$ alors MF = MH. La réciproque est-elle vraie ?

> Appeler le professeur pour une aide éventuelle.

   b) En utilisant les propriétés géométriques de la figure, démontrer que les angles $\widehat{\text{GMK}}$ et $\widehat{\text{KMF}}$ sont égaux.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 15

Résolution d'une équation du second degré

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x^2$.
Soit a un réel et g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = 2x + a$.
On note respectivement $\mathcal{C}$ et Δ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal.
Cet exercice a pour objectif d'étudier les points d'intersection éventuels des courbes $\mathcal{C}$ et Δ puis de résoudre l'équation $x^2 = 2x + a$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, représenter graphiquement les fonctions f et g.
   Faire afficher la valeur de a.
   Pour établir des conjectures, on pourra se limiter aux réels a tels que $-5 \leqslant a \leqslant 5$.

2. Observer les représentations graphiques de g obtenues pour diverses valeurs de a.
   Que peut-on dire des diverses courbes représentatives obtenues ?

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

3. a) Dans cette question a = 3.
   Que peut-on conjecturer sur le nombre de points communs à $\mathcal{C}$ et Δ et sur les coordonnées de ces points ?
   b) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{C}$ et Δ semblent avoir deux points communs ?
   c) Pour quelle valeur de a $\mathcal{C}$ et Δ semblent-t-elles avoir un et un seul point commun? Quelles semblent être les coordonnées de ce point ?
   d) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{C}$ et Δ semblent n'avoir aucun point commun ?

4. Selon les valeurs de a, que peut-on conjecturer sur le nombre de solutions de l'équation $x^2 = 2x + a$?

Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et une aide éventuelle.

5. a) Démontrer que les équations $x^2 = 2x + a$ et $(x-1)^2 = a + 1$ sont équivalentes.
   b) Étudier le signe de a + 1 (on distinguera trois cas).
   c) Déterminer les solutions de l'équation $x^2 = 2x + a$ dans chacun des trois cas examinés ci-dessus.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 16

Méléliennes d'un triangle

Dans un triangle, une *ménélienne* est une droite qui ne passe par aucun des sommets et qui n'est parallèle à aucun des trois côtés.
Soit ABC un triangle, A' un point de la droite (BC), B' un point de la droite (AC). On appelle C' le point d'intersection des droites $(A'B')$ et (AB) lorsqu'il existe.

Le but de cet exercice est d'étudier le produit $\frac{AC'}{C'B}\times\frac{BA'}{A'C}\times\frac{CB'}{B'A}$.

1. Faire afficher le produit des rapports de longueurs $\frac{AC'}{C'B}\times\frac{BA'}{A'C}\times\frac{CB'}{B'A}$

Appeler l'examinateur pour une vérification

2. Faire varier les sommets A, B, C ainsi que la droite $(A'B')$. Émettre une conjecture.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. Soit D le point d'intersection de la droite (AC) et de la parallèle à $(A'B')$ passant par B.

   En appliquant le théorème de Thalès, démontrer les égalités $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'D}$ et $\frac{BA'}{A'C} = \frac{DB'}{B'C}$. Conclure.

Appeler l'examinateur pour une aide éventuelle.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 17

Une propriété des droites concourantes dans un triangle

Soit ABC un triangle et M un point intérieur à ce triangle. On appelle respectivement A', B', C' les points d'intersection des droites issues de A, B, C et passant par M avec les côtés opposés à ces sommets.

Le but de cet exercice est d'étudier le produit $\frac{AC'}{C'B}\times\frac{BA'}{A'C}\times\frac{CB'}{B'A}$.

1. Faire afficher le produit des rapports de longueurs $\frac{C'A}{C'B}\times\frac{A'B}{A'C}\times\frac{B'C}{B'A}$

Appeler l'examinateur pour une vérification

2. Faire varier les sommets A, B, C ainsi que le point M. Émettre une conjecture.

3. Etant donné un triangle NPQ, on notera $\mathcal{a}_{\text{NPQ}}$ l'aire de ce triangle.
   a) Démontrer les égalités $\frac{\mathcal{a}_{\text{A'AB}}}{\mathcal{a}_{\text{A'AC}}}=\frac{\mathcal{a}_{\text{A'MB}}}{\mathcal{a}_{\text{A'MC}}}=\frac{A'B}{A'C}$. En déduire que $\frac{\mathcal{a}_{\text{MAB}}}{\mathcal{a}_{\text{MAC}}}=\frac{A'B}{A'C}$.
   b) Exprimer de manière analogue les quotients $\frac{B'C}{B'A}$ et $\frac{C'A}{C'B}$ en fonction de deux des aires $\mathcal{a}_{\text{MAB}}$, $\mathcal{a}_{\text{MAC}}$, $\mathcal{a}_{\text{MBC}}$.
   c) Conclure.

Appeler l'examinateur pour une aide éventuelle.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 18

Conjecture de Syracuse

On considère l'algorithme suivant :
Affecter la valeur 1 à N
Choisir un entier U strictement positif.
Afficher N
Afficher U
Tant que U > 1 :
- Si ce nombre est pair, le diviser par 2.
- Si ce nombre est impair, prendre le triple et ajouter 1.
Fin du Si
Augmenter N de 1
Afficher N
Afficher U
Fin du tant que

1. Vérifier que pour U = 5, on obtient successivement :

N	1	2	3	4	5	6
U	5	16	8	4	2	1

On dira que (5, 16, 8, 4, 2, 1) est la **trajectoire** ou vol de 5. Chaque entier de cette suite est une **étape** de la trajectoire, 16 est **l'altitude maximale** de cette trajectoire. La **durée** d'un vol est le nombre d'étapes nécessaires avant l'apparition du premier 1, s'il apparaît. La durée du vol de 5 est égale à 6.

2. Réaliser l'algorithme décrit ci-dessus à l'aide du logiciel de votre choix.

3. Appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 10.

Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle.

4. Modifier l'algorithme afin d'afficher la durée et la hauteur d'un vol.
Appliquer cet algorithme à 10, 27 et 97.

Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle.

La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier non nul U, le processus aboutit à 1 (il a donc une durée de vol finie).

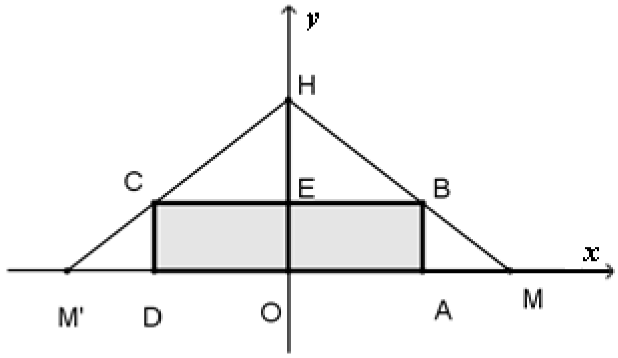
5. A ce jour, cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers inférieurs à 10^{15} mais n'a toujours pas été démontrée dans le cas général. On peut cependant démontrer cette conjecture dans un certain nombre de cas.
   a) Soit k un entier naturel. Démontrer que le vol de 2^k a une durée finie que l'on précisera.
   b) Démontrer que tous les nombres pairs compris entre 10^{15} et 2×10^{15} ont une durée de vol finie.

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 19

Etude d'une fonction homographique



Dans un aérodrome, on souhaite éclairer les alentours d'un hangar cylindrique, de 10 m de haut et de base circulaire de 40 m de diamètre, en plaçant un gyrophare sur un mât placé sur le toit du hangar, selon l'axe du cylindre (voir figure ci-contre).
Lorsque le gyrophare est allumé, le hangar fait une ombre circulaire de rayon *x*. On désire étudier la hauteur OH du gyrophare en fonction du rayon *x* de cette ombre.

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 et AD = 40.
La médiatrice de [AD] coupe [BC] en E et [AD] en O.
Le gyrophare est placé en un point H de la demi-droite [OE) (H $\notin$ [OE]).
L'ombre portée a un rayon $x = \text{OM} = \text{OM}'$.

1. a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On prendra 1 unité graphique pour 1 m. Faire afficher *x* et OH.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

   b) Quel semble être le rayon de l'ombre portée lorsque H se trouve à 25 m du sol ?
   c) Pour $x > 20$, faire apparaître l'ensemble des points P de coordonnées (x, OH) lorsque M parcourt la demi-droite [A*x*).

2. Soit *h* la fonction qui à tout réel *x* strictement supérieur à 20 associe OH. Quel semble être le sens de variation de cette fonction ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle

3. a) En considérant les triangles MAB et MOH, exprimer $h(x)$ en fonction de *x*.

Appeler l'examinateur pour une aide éventuelle

   b) Démontrer que pour tout $x > 20$, $h(x) - 10 = \dfrac{200}{x-20}$. Quel est le signe de $h(x) - 10$?
   Quelle interprétation peut-on en donner ?
   c) Résoudre l'équation $h(x) = 25$ et valider la conjecture émise à la question 1.b).

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 20

Le meilleur prix

Le directeur d'un théâtre de 2 000 places constate que si le prix d'une place est de 50 euros, il ne peut compter que sur 500 spectateurs. Il remarque aussi que chaque baisse de 2euros du prix du billet attire 100 spectateurs de plus. (600 spectateurs pour un prix de 48 euros, 700 spectateurs pour un prix de 46 euros etc…).
On cherche à connaître le prix à fixer pour que la recette du directeur de théâtre soit maximale.

1. Soit n le nombre de diminutions de 2 euros et $P(n)$ la somme récoltée en milliers d'euros après une diminution de n fois 2 euros du prix du billet.

   À l'aide d'un logiciel, organiser le calcul de P(n) et compléter un tableau de ce type :

n	Prix d'une place	Nombre de spectateurs	Somme récoltée $P(n)$ en milliers d'euros
0	50	500	25
1	48	600	28,8
…	…	…	

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

2. a) Représenter le nuage des points de coordonnées (n, $P(n)$) pour n entier compris entre 0 et 20.

   b) Quel est le prix à fixer pour faire salle comble ?

   c) Quel est le prix à fixer pour que la recette soit maximale et quel est le montant de cette recette ?

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle

3. a) Démontrer que, pour tout entier n compris entre 0 et 20, $P(n) = -0{,}2\,n^2 + 4n + 25$.

   b) En déduire que, pour tout entier n compris entre 0 et 20, $45 - P(n) = 0{,}2(n - 10)^2$.

   c) En déduire le signe de $45 - P(n)$. Quel résultat retrouve-t-on ?

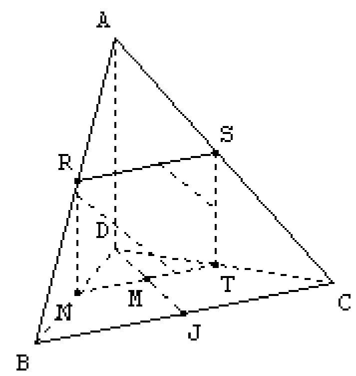
Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 21

Section d'un tétraèdre

Soit ABCD un tétraèdre dont les faces DAB, DAC et DBC sont des triangles isocèles rectangles en D avec : DA = DB = DC = 4.
Soit J le milieu du segment [BC] et M un point du segment [DJ].
On appelle Π le plan passant par M et parallèle aux droites(BC) et (DA).
On admet que la section du tétraèdre ABCD par le plan Π est un quadrilatère NRST comme l'indique la figure ci-jointe.



Le but de cet exercice est de déterminer la position de M sur [DJ] qui rend l'aire du quadrilatère NRST maximale.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
   Faire afficher la longueur DM et l'aire du quadrilatère NRST.

> Appeler le professeur pour une vérification de la figure et de l'affichage obtenus.

2. Déplacer le point M sur le segment [DJ].
   a) Quelle semble être la nature : du quadrilatère NRST ? du triangle DMT ? du triangle STC ?
   Choisir des affichages permettant de conforter les conjectures émises.

   b) Émettre une conjecture sur la longueur DM qui rend l'aire du quadrilatère NRST maximale.

> Appeler le professeur pour une vérification.

3. a) Démontrer l'une des trois conjectures émises à la question 2. a).
   b) On pose x = DM. On admet que DJ = $2\sqrt{2}$ (x appartient donc à l'intervalle $\left[0, 2\sqrt{2}\right]$).

   On note $S(x)$ l'aire du quadrilatère NRST.
   Exprimer NT en fonction de x et montrer que $\mathrm{TS} = 4 - \sqrt{2}x$. En déduire S($x$).

> Appeler le professeur pour une aide éventuelle.

   c) Montrer que pour tout réel x compris entre 0 et $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2} - S(x) = 2\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)^2$.

   Quelle est l'aire minimale du quadrilatère NRST lorsque M se déplace sur le segment [DJ] ?
   Quelles sont alors les dimensions du quadrilatère NRST ?

.

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 22

Comparaison de deux nombres

Le but de cet exercice est de comparer les réels 1 – a et $\dfrac{1}{1+a}$ pour des « petites » valeurs positives de a.

1. a) À l'aide d'un logiciel, organiser le calcul de 1 – a, $\dfrac{1}{1+a}$ et $\dfrac{1}{1+a}-(1-a)$ pour des valeurs de a allant de 0 à 1 par pas de h = 0,1 puis par pas de h = 0,01.

   b) Que peut on conjecturer sur la comparaison des nombres 1 – a et $\dfrac{1}{1+a}$ sur l'intervalle $[0;1]$?

   c) Soit a un réel compris entre 0 et 1. Proposer une condition suffisante sur a pour que 1 – a soit une valeur approchée de $\dfrac{1}{1+a}$ à moins de 0,1 près, puis à moins de 0,05 près.

Appeler l'examinateur pour une vérification et une aide éventuelle.

2. a) Démontrer que pour tout réel a différent de – 1, $\dfrac{1}{1+a}-(1-a)=\dfrac{a^2}{1+a}$.

   b) En déduire que, pour tout réel a compris entre 0 et 1 : $0 \leq \dfrac{1}{1+a}-(1-a) \leq a^2$.

   Dans quel cas a-t-on $\dfrac{1}{1+a}=1-a$?

Appeler le professeur pour une aide éventuelle.

   c) Valider les conjectures émises à la question 1. c).

Académie de Versailles **Année 2009-2010**

Épreuve pratique de mathématiques en seconde

Sujet numéro 23

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit r un réel strictement positif, O un point du plan et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et A un point de $\mathcal{C}$. On appelle B le second point d'intersection de la droite (AM) et du cercle $\mathcal{C}$, les points A et B pouvant être éventuellement confondus.
Le but de cet exercice est d'étudier le produit MA × MB lorsqu'on déplace le point A sur le cercle $\mathcal{C}$.

1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Faire afficher les longueurs MA et MB ainsi que le produit MA × MB.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure obtenue et une aide éventuelle.

2. Faire une conjecture concernant le produit MA × MB lorsqu'on déplace le point A.

3. Afficher la différence des carrés $MO^2 - OA^2$. Émettre une autre conjecture.

> Appeler le professeur pour une vérification des conjectures et une aide éventuelle.

4. En considérant le point I milieu du segment [AB], exprimer le produit MA × MB en fonction de MO^2 et de r^2 et valider les conjectures émises.