ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades de mathématiques

Concours par équipes

Élèves de troisième et seconde

Mardi 24 mars 2026

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

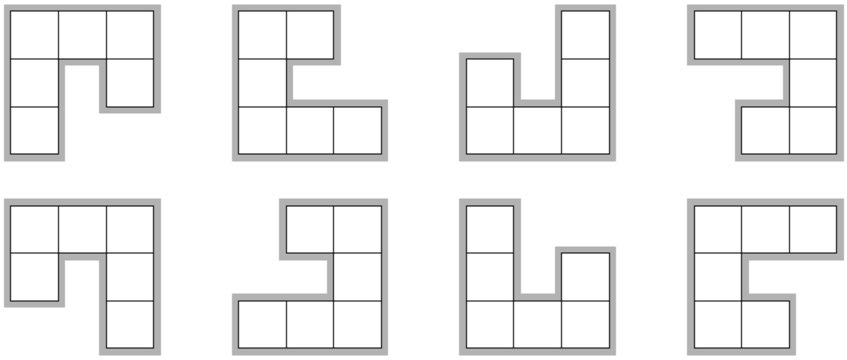
Les trois exercices sont à traiter. Chaque équipe remet une copie rédigée collectivement. Les équipes peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels elles sont parvenues.

On n'écrit pas les réponses sur le sujet.

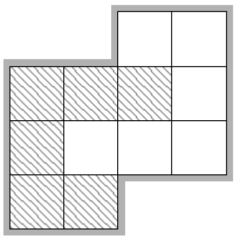
Exercice 1

Rectangles crochetables

On appelle *crochet* l'une des huit figures ci-dessous, chacune formée à l'aide de six carrés de côté 1 cm. On remarquera que ces figures s'obtiennent les unes à partir des autres à l'aide de rotations et/ou de symétries (ces figures ne sont pas représentées en vraie grandeur).



On s'intéresse dans cet exercice à déterminer les rectangles de dimensions entières que l'on peut paver en utilisant des crochets, c'est-à-dire recouvrir entièrement sans chevauchement des crochets. Un tel rectangle sera dit *crochetable*. Nous donnons ci-dessous un exemple de figure (qui n'est pas un rectangle) que l'on a pavée à l'aide de crochets.



On pourra utiliser l'annexe ci-jointe afin de s'aider dans ses constructions et ses réponses.

1. Étude de quelques exemples.

- **a.** Montrer qu'un rectangle de 3 cm de largeur et 4 cm de longueur est crochetable.
- **b.** Donner un exemple de carré qui soit crochetable.
- **c.** On considère un entier naturel n tel que $n \leq 2$. Montrer qu'un rectangle de largeur n cm n'est pas crochetable.
- **d.** Montrer qu'un rectangle de largeur 4 cm et de longueur 5 cm n'est pas crochetable.
- **e.** Déterminer un rectangle de largeur supérieure à 2025 et de longueur supérieure à 2026 qui soit crochetable.

2. On s'intéresse dans cette question à une condition nécessaire pour qu'un rectangle soit crochetable. On considère deux entiers naturels m et n avec $m \leq n$, tels qu'un rectangle de largeur m cm et de longueur n cm soit crochetable

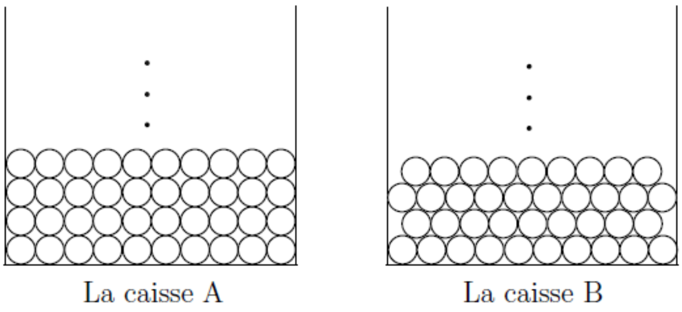
- **a.** Montrer que le nombre de crochets pour paver un tel rectangle est pair.
- **b.** En déduire que l'entier mn est un multiple de 12.
- **c.** Déterminer un rectangle de largeur supérieure à 2025 et de longueur supérieure à 2026 qui ne soit pas crochetable.

3. Existe-t-il un entier n tel que tous les carrés dont le côté mesure au moins n cm soient crochetables ?

Exercice 2

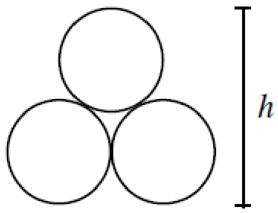
Empilement de tuyaux

Deux caisses identiques sont remplies de tuyaux cylindriques. Chaque tuyau a un diamètre de 10 cm.
Les tuyaux sont empilés de façons différentes dans chaque caisse.
La figure ci-dessous représente, en vue de face, les quatre premiers étages de chaque caisse.



1. Si chaque caisse contient 200 tuyaux, combien d'étages de tuyaux y a-t-il dans chaque caisse ?

2. La figure ci-contre correspond à l'empilement de trois tuyaux rangés dans la caisse B.
Déterminer la hauteur h de cet empilement.



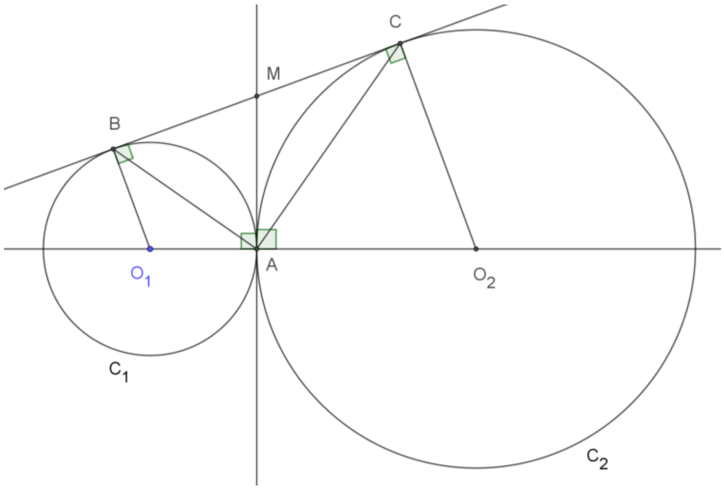
3. Déterminer la différence entre les hauteurs totales des empilements dans la caisse A et dans la caisse B lorsque 200 tuyaux sont empilés dans chaque caisse. En donner un arrondi au millimètre.

Exercice 3

Histoire de tangentes

Soit O un point du plan. On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ de centre O au point T lorsque T est un point du cercle $\mathcal{C}$ et les droites $\mathcal{D}$ et (OT) sont perpendiculaires.
On dit que deux cercles sont tangents extérieurement en un point T lorsqu'ils ont une tangente commune au point T et qu'ils sont situés de part et d'autre du point T.

On rappelle qu'une affirmation ne peut résulter d'une simple lecture de la figure.



On considère la figure ci-contre dans laquelle :
- les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs O_1 et O_2 sont tangents extérieurement en A (les points O_1, O_2 et A sont donc alignés) ;
- la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}_1$ en B et tangente à $\mathcal{C}_2$ en C ;
- le point M est le point d'intersection de la tangente commune en A aux deux cercles avec la droite (BC).
-

1. **a.** Démontrer que $MA = MB = MC$.
(on pourra comparer les triangles O_1BM et O_1AM)
b. Déterminer la nature du triangle ABC.
(on pourra introduire le point A' symétrique de A par rapport à M)

2. La droite (BA) recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en D et la droite (CA) recoupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en E.
a. Démontrer que O_1 est le milieu du segment $[BE]$ et que O_2 est le milieu du segment $[CD]$.
b. Déterminer la nature du quadrilatère $BEDC$.

3. **a.** Montrer que les triangles BCE et BCD sont semblables.
b. En déduire l'expression de la longueur BC en fonction des rayons respectifs r_1 et r_2 des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.