ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades de mathématiques

Concours par équipes

Élèves de troisième et seconde

Mardi 25 mars 2025

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les trois exercices sont à traiter. Chaque équipe remet une copie rédigée collectivement. Les équipes peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels elles sont parvenues.

On n'écrit pas les réponses sur le sujet.

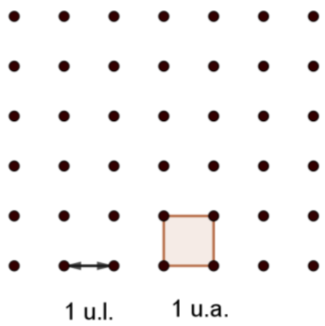
Exercice 1

LE THEOREME DE PICK

Un réseau pointé à maille carrée est formé de points d'intersection de droites verticales et de droites horizontales, comme sur la figure ci-contre, la distance entre deux parallèles voisines étant prise pour unité.

On appelle *polygone de Pick*, un polygone non aplati, non croisé et sans trou construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.

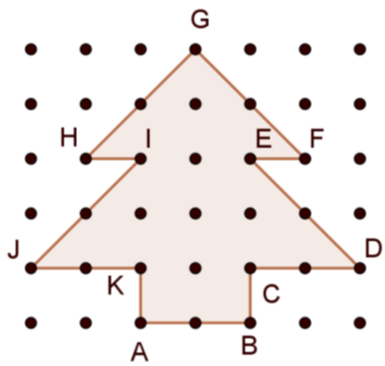
Dans tout l'exercice, l'unité de longueur est la distance entre deux points voisins sur une ligne du quadrillage. L'unité d'aire est donc l'aire d'un carré de côté 1.



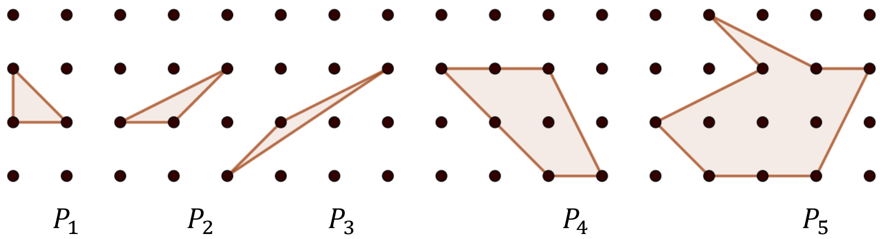
N.B. Des feuilles de papier pointé à maille carrée sont fournies aux équipes. On peut découper les schémas réalisés et les coller sur la copie.

Partie A

1. Calculer l'aire du polygone ABCDEFGHIJK ci-dessous.



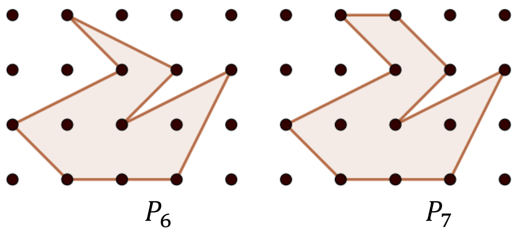
2. Déterminer l'aire des polygones P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 représentés ci-dessous.



Étant donné un polygone de Pick, on note i le nombre de points du réseau à l'intérieur du polygone et b le nombre de points du réseau sur le bord du polygone. On admet, pour le moment, que l'aire d'un polygone de Pick est donnée par la formule suivante :

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

3. À l'aide de la formule de Pick, donner l'aire des polygones P_6 et P_7 représentés ci-dessous.



4. Construire un polygone de Pick d'aire 7,5.

5. Tracer des triangles de Pick, vérifiant $b = 3$, dont l'aire vaut :

a. 1,5 **b.** 2,5 **c.** 3,5.

Peut-on généraliser à toute aire de la forme $n + \frac{1}{2}$ avec n entier ?

Partie B

On appelle *triangle mince*, un triangle dont les sommets sont des points du réseau et qui n'a aucun point du réseau dans son intérieur ni sur ses côtés (par exemple, les polygones P_1, P_2, P_3 de la partie A sont des triangles minces).

On admet que tous les triangles minces ont la même aire.

L'objectif de cette partie est alors de démontrer certaines étapes de la démonstration de la formule de Pick.

1. Démontrer que tout triangle de Pick se décompose en un nombre fini de triangles minces.

On admet que tous les polygones de Pick se décomposent en un nombre fini de triangles de Pick.

2. Dans cette question, on décide d'ajouter un triangle mince à un polygone de Pick P.

a. Que deviennent i et b lorsque le triangle mince ajouté est collé à P par un unique côté ?
Le nouveau polygone construit vérifie-t-il toujours la formule de Pick ?

b. Que deviennent i et b lorsque le triangle mince ajouté est collé à P par deux côtés ?
Le nouveau polygone construit vérifie-t-il toujours la formule de Pick ?

3. Conclure.

Exercice 2

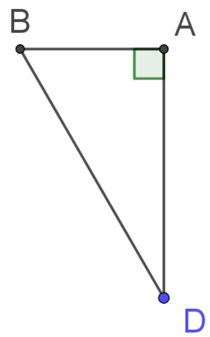
Soit ABCD un trapèze rectangle en A et en D et dont les bases sont les segments $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$.

On suppose que :

les droites (BC) et (BD) sont perpendiculaires

$\widehat{\mathrm{BCD}} = 30°$

et on note $\mathrm{BC} = a$.



1. Reproduire la figure ci-contre figure et la compléter tout au long de l'exercice.

2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.

3. Montrer que les triangles BCD et ABD sont semblables.

4. Exprimer en fonction de a les longueurs $\mathrm{CD}, \mathrm{BD}, \mathrm{AB}$ et AD.

5. Soit E le symétrique du point B par rapport au milieu I de $[\mathrm{CD}]$. Montrer que les points $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{E}$ et D sont situés sur un même cercle $\mathcal{C}$ dont $[\mathrm{BE}]$ est un diamètre.

6. Soit F le symétrique du point I par rapport au milieu J de $[\mathrm{BC}]$. Montrer que le point F est situé sur le cercle $\mathcal{C}$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

Un peu d'arithmétique

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On rappelle qu'un entier m est multiple d'un entier n lorsqu'il existe un entier k tel que $m = kn$.

Partie A

On veut déterminer le nombre d'entiers m compris entre 1 et 1 000 vérifiant la propriété P :
« il existe deux entiers naturels a et b tels que $m = a^2 - b^2$ ».

1. Montrer que si a et b sont deux entiers naturels alors les entiers $a - b$ et $a + b$ sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

2. En déduire que si m vérifie la propriété P alors m est soit multiple de 4 soit un nombre impair.

3. **a.** Montrer que 40 et 21 vérifient la propriété P.

b. Montrer que si m est un multiple de 4 alors m vérifie la propriété P.

c. Montrer que si m est un nombre impair alors m vérifie la propriété P.

4. Conclure.

Partie B

On définit la *factorielle* d'un entier naturel non nul n par $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$.
Le nombre entier $n\,!$ se lit « factorielle n ».
Par exemple $8\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 7 \times 8 = 40\,320$.

Déterminer les entiers naturels a, b, c, d tels que :

$$a \times b \times c \times d = 8\,! \quad \text{et} \quad (a+1)(b+1) = 525, (b+1)(c+1) = 147.$$