

Olympiades académiques de mathématiques

Concours par équipe

Mardi 29 mars 2022

L'épreuve dure deux heures. Les trois exercices sont à traiter.

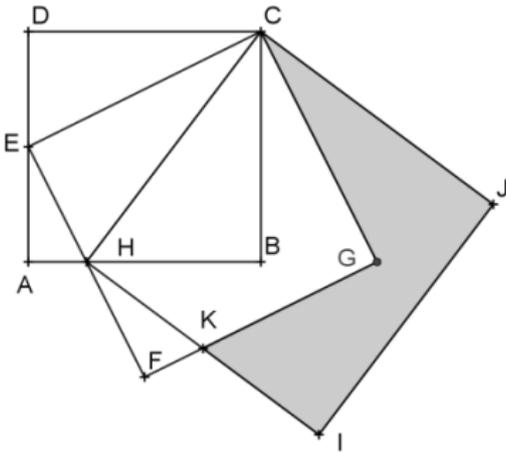
Chaque équipe rédige et remet une seule copie (la feuille support du sujet ne saurait tenir lieu de copie).

Travailler en équipe suppose une **relecture collective du travail produit**. Les équipes peuvent toutefois joindre à leur copie des brouillons témoignant des pistes de recherche suivies s'il leur a manqué du temps.

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés, ainsi que la colle et les ciseaux.

Exercice numéro 1

Un carré glisse et grossit



Une unité de longueur étant choisie dans le plan, le carré ABCD a pour côté 8. Le point E étant le milieu du segment [AD], on construit sur [CE] le carré CEFG. Le côté [EF] de ce carré coupe [AB] en H.

1. **a.** Montrer que $AH = 2$.
- b.** Montrer que H est le milieu du segment [EF].

2. On construit sur [CH] le carré CHIJ.
 - a.** Quelle est la longueur du côté [CH] ?
 - b.** Montrer que K est le milieu de [HI].

3. On cherche à déterminer l'aire de la partie grisée de la figure.

- a.** Quelle est l'aire du carré CEFG ?
- b.** Quelle est l'aire du triangle CKG ?
- c.** Conclure.

Exercice numéro 2

Jeux de balles

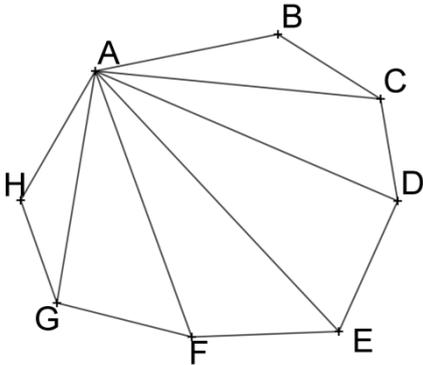
Des balles, numérotées de 1 à 27, sont disposées dans trois paniers. La moyenne des numéros portés par les balles placées dans le premier panier (mettons qu'il est bleu) est 15. La moyenne des numéros portés par les balles placées dans le deuxième panier (mettons qu'il est blanc) est 3 et la moyenne des numéros portés par les balles placées dans le troisième panier (rouge) est 18.

- 1.** Quelles sont les séries statistiques composées de nombres entiers strictement positifs distincts de moyenne 3 ?
- 2.** Il y a trois balles dans le panier blanc. Combien y a-t-il de balles dans chacun des autres paniers ? Donner trois exemples de compositions possibles pour le panier rouge.
- 3.** On suppose dorénavant qu'aucun panier ne contient moins de quatre balles.
 - a.** Pour chacune des compositions trouvées pour le panier blanc, combien y a-t-il de balles dans les paniers bleu et rouge ?
 - b.** Donner un exemple de répartition aboutissant à chacun des résultats précédents.

Exercice numéro 3

Géopolitique des polygones réguliers

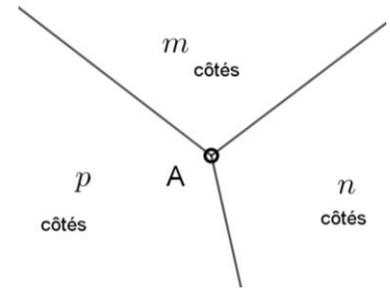
Rappel : un polygone est dit convexe si, quel que soit celui de ses côtés qu'on considère, tous les sommets appartiennent au même demi-plan limité par le support de ce côté.



1. a. On donne un entier n supérieur ou égal à 3 et un polygone convexe possédant n côtés. Un sommet A de ce polygone étant donné, on considère tous les triangles ayant pour sommets A et deux autres sommets consécutifs du polygone. Combien y a-t-il de tels triangles ?

b. Quelle est la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés ?

c. Quelle est la mesure commune des angles d'un polygone régulier à n côtés ?



2. Les mesures en degrés des angles

de trois polygones réguliers sont des nombres entiers. Ces polygones partagent un sommet A , et leurs côtés aboutissant à A sont contenus dans trois demi-droites d'origine A .

a. Faire la figure dans le cas où les trois polygones sont des hexagones.

b. Faire la figure dans le cas où deux des polygones sont des octogones. Quelle est la nature du troisième ?

3. a. Quels sont les polygones réguliers dont les mesures en degrés des angles sont entières ?

b. Quelles sont les organisations possibles de trois tels polygones s'ajustant parfaitement en un sommet ? On donnera tous les triplets (m, n, p) d'entiers correspondant au nombre croissant de côtés.