ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades inter-académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 24 mars 2026

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à ***rédiger sur leurs copies*** les solutions qu'ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

Exercice 1
Des nombres hauts en couleur

On rappelle la définition suivante :
Un nombre x est rationnel s'il existe deux entiers a et b, $b \neq 0$, tels que $x = \frac{a}{b}$.

À chaque nombre rationnel positif, on associe une couleur, jaune ou bleu, selon les règles suivantes :

- **1re règle** : le nombre 1 est bleu ;
- **2e règle** : pour tout nombre rationnel x, les nombres x et $x+1$ ne sont pas de la même couleur ;
- **3e règle** : pour tout nombre rationnel x non nul, les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont de la même couleur.

1. Montrer que les nombres 0 et $\frac{1}{2}$ sont jaunes.

2. **a**. Déterminer la couleur du nombre 8 puis du nombre 11.
b. Expliquer comment déterminer la couleur d'un nombre entier positif n quelconque.

3. Déterminer la couleur des nombres suivants :
a. $2+\frac{1}{4}$ **b**. $\frac{13}{4}$ **c.** $\frac{3}{4}$ **d.** $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}$

4. Trouver deux nombres rationnels positifs de couleur jaune dont la somme est jaune.

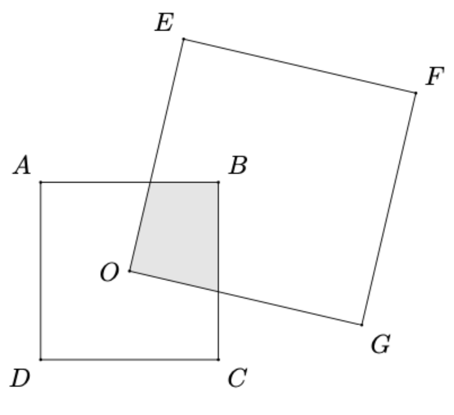
5. Trouver deux nombres rationnels positifs de couleur jaune dont la somme est bleue.

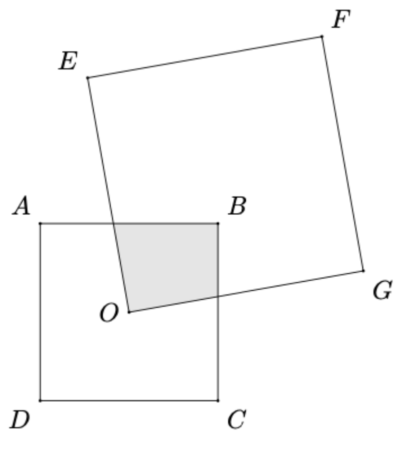
6. Soit n un nombre entier positif non nul. Montrer que le nombre $n+\frac{1}{n}$ est jaune.

Exercice 2
Intersection de carrés

Soit $ABCD$ un carré de côté de longueur x et de centre O.
Soit $OEFG$ un carré dont la longueur du côté est plus grande que x.
On fait tourner le carré $OEFG$ autour du point O. La surface grisée correspond à l'intersection des deux carrés. On admet que cette surface grisée est soit un quadrilatère soit un triangle.

Voici deux exemples de figures :





1.

a. Faire une figure dans le cas où la surface grisée est un carré.

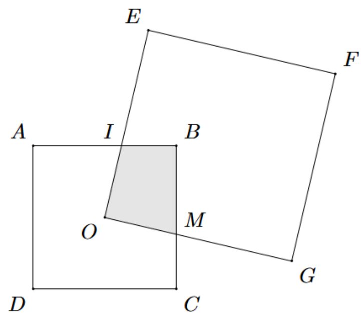
b. Dans le cas où la surface grisée est un carré, exprimer en fonction de x l'aire de la surface grisée.

2.

- **a.** Faire une figure dans le cas où la surface grisée est un triangle.
- **b.** Dans le cas où la surface grisée est un triangle, exprimer en fonction de x l'aire de la surface grisée.

3. Dans cette question, la surface grisée est un quadrilatère quelconque que l'on appelle $OIBM$, où le point I est l'intersection des segments $[AB]$ et $[OE]$, et M est l'intersection de $[BC]$ et $[OG]$.

   Exprimer en fonction de x l'aire de la surface grisée.



4. L'aire de la surface grisée change-t-elle quand le carré $OEFG$ tourne autour du point O ?

Exercice 3
Des nombres tempérés

Un nombre entier strictement positif n est dit 2-tempéré s'il existe deux entiers positifs ou nuls a et b tels que : $n = \frac{a^2 + b^2}{2}$.
Par exemple : 10 est 2-tempéré car $10 = \frac{2^2 + 4^2}{2}$ et 16 est 2-tempéré car $16 = \frac{4^2 + 4^2}{2}$.

1. **a.** Montrer que 13 est un nombre 2-tempéré.

   b. Le nombre 11 est-il 2-tempéré ?

2. On rappelle qu'un nombre n est un carré parfait s'il existe un nombre entier m tel que $n = m^2$ (par exemple, 16 est un carré parfait car $16 = 4^2$).
   Montrer que tout carré parfait est 2-tempéré.

3. Montrer que si n est 2-tempéré, alors $4n$ est aussi 2-tempéré.

De la même façon, un nombre entier strictement positif n est dit 3-tempéré s'il existe trois entiers positifs ou nuls a, b et c tels que : $n = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. Par exemple, 8 est 3-tempéré car $8 = \frac{2^2+2^2+4^2}{3}$.

4. Le nombre 10 est-il à la fois 2-tempéré et 3-tempéré ?

Soit k un nombre entier supérieur ou égal à 2. Un nombre entier strictement positif n est dit k-tempéré si n est la moyenne de k carrés d'entiers.

5. **a.** Montrer que, quel que soit k supérieur ou égal à 2, le nombre k est k-tempéré.

   b. Montrer qu'un carré parfait est k-tempéré, quel que soit k supérieur ou égal à 2.

Exercice 4
Aire d'une mandorle

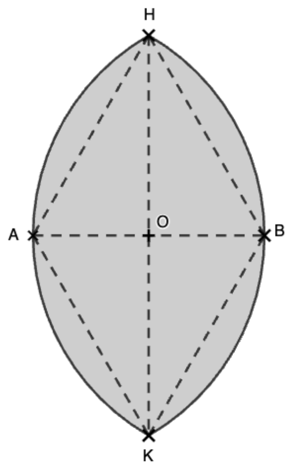
Une mandorle est un élément d'architecture de forme ovale. Ce mot provient de l'italien mandorla qui signifie « amande ». Cette forme géométrique consistait à mettre en valeur un personnage.

Abbaye de Cluny, *les tons de la musique*
Source : https://bourgognemedievale.com/departement-et-pays/saone-et-loire/pays-sud-bourgogne-clunisois/cluny/

Sur la figure ci-contre, on a représenté une mandorle qui est la surface grisée délimitée par deux arcs de cercle de même rayon AB et de mêmes extrémités H et K :

- un arc de cercle a pour centre le point A et passe par le point B ;
- un arc de cercle a pour centre le point B et passe par le point A.

Le point O est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère $AHBK$.
Le but de l'exercice est de calculer l'aire d'une mandorle où AB=1 dm.



1. Construire la mandorle en vraie grandeur avec AB=1 dm.

2. Déterminer la nature du quadrilatère $AHBK$.

3. Démontrer que la hauteur KH de la mandorle est égale à $2\sqrt{\frac{3}{4}}$ dm. On admettra que $2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

4. Calculer l'aire, en dm^2, du quadrilatère $AHBK$. En donner la valeur exacte.

5. Calculer l'aire, en dm^2, de la portion du disque de centre A et de rayon AB, délimitée par les rayons $[AH]$ et $[AK]$, et passant par le point B.

6. En déduire l'aire, en dm^2, de la mandorle.