

Éléments de correction

Exercice 1

Des nombres hauts en couleur

- D'après la 1^{re} règle, 1 est bleu. Donc, d'après la 2^e règle, 0 et 2 sont jaunes. On en déduit, d'après la 3^e règle, que $\frac{1}{2}$ est aussi jaune.
- 2 est jaune, donc d'après la 2^e règle : 3 est bleu, 4 est jaune, 5 est bleu, 6 est jaune, 7 est bleu, 8 est jaune, 9 est bleu, 10 est jaune, 11 est bleu.
 - D'après la 2^e règle, x et $x+1$ ne sont pas de la même couleur, et $x + 1$ et $x + 2$ ne sont pas de la même couleur. On en déduit que x et $x+2$ sont de la même couleur. Plus généralement, pour tout entier k , x et $x + 2k$ sont de la même couleur, et x et $x + 2k + 1$ ne sont pas de la même couleur. Comme 0 est jaune, on en déduit que tous les nombres entiers pairs sont jaunes et tous les nombres entiers impairs sont bleus.
- Comme 2 est un nombre pair, on en déduit, d'après la 2^e règle, que $\frac{1}{4}$ et $2 + \frac{1}{4}$ sont de la même couleur. Or, d'après la 3^e règle, $\frac{1}{4}$ et 4 sont de la même couleur et, 4 étant pair, 4 est jaune.
Au final, $2 + \frac{1}{4}$ est jaune.
 - $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$. Comme 3 est un nombre impair, on en déduit, d'après la 2^e règle, que $\frac{13}{4}$ et $\frac{1}{4}$ ne sont pas de la même couleur. Or, d'après la 3^e règle, $\frac{1}{4}$ et 4 sont de la même couleur et, 4 étant pair, 4 est jaune. Au final, $\frac{13}{4}$ est bleu.
 - D'après la 3^e règle, $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont de la même couleur. Or $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$. Comme 3 est impair, 3 est bleu donc, d'après la 3^e règle, $\frac{1}{3}$ est bleu et, d'après la 2^e règle, $1 + \frac{1}{3}$ est jaune.
Au final, $\frac{3}{4}$ est jaune.
 - Comme 7 est impair, 7 est bleu. D'après la 3^e règle, $\frac{1}{7}$ est aussi bleu. Comme 3 est impair, d'après la 2^e règle, $3 + \frac{1}{7}$ est jaune. D'après la 3^e règle, $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}$ est aussi jaune.
- Les nombres 0 et 2 sont jaunes. Leur somme est $0 + 2 = 2$. Elle est jaune.
- On a vu que $\frac{3}{4}$ est jaune. Or $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$. Or 2 est jaune, d'où, d'après la 3^e règle, $\frac{1}{2}$ est jaune. Donc, d'après la 2^e règle, $1 + \frac{1}{2}$ est bleu.
- Soit n un entier naturel non nul.
Si n est pair, alors, d'après la 3^e règle, $\frac{1}{n}$ est jaune comme n . Et, comme n est pair, d'après la 2^e règle, $n + \frac{1}{n}$ est aussi jaune.
Si n est impair, alors, d'après la 3^e règle, $\frac{1}{n}$ est bleu comme n . Et, comme n est impair, d'après la 2^e règle, $n + \frac{1}{n}$ n'est pas de la même couleur que $\frac{1}{n}$ et est donc jaune.
Dans tous les cas, $n + \frac{1}{n}$ est jaune.

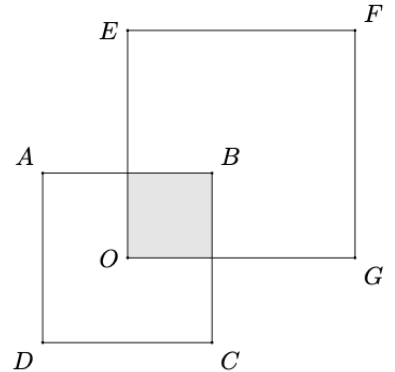
Exercice 2 Intersection de carrés

1. **a et b.** Voici une configuration possible, il y en a d'autres.

Dans le cas où la surface grisée est un carré, son côté est de longueur $\frac{x}{2}$.

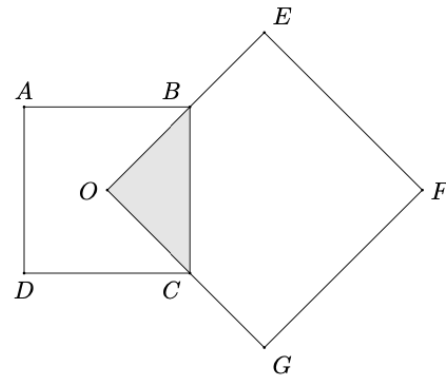
Son aire $A_{\text{grisée}}$ est donc :

$$A_{\text{grisée}} = \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$$



2. **a et b.** Dans le cas où la surface grisée est un triangle, la hauteur issue de O est de longueur $\frac{x}{2}$ et la base relative à cette hauteur est un côté de $ABCD$ et mesure donc x . Son aire $A_{\text{grisée}}$ est donc :

$$A_{\text{grisée}} = \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$$



3. **1^{ère} méthode :**

Soit K et H les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BD]$.
On veut montrer que les triangles OKI et OHM sont égaux :

- Les triangles OKI et OHM sont rectangles respectivement en K et en I .

- De plus, $\widehat{KOI} = \widehat{KOH} - \widehat{IOH} = 90^\circ - \widehat{IOH}$

Et $\widehat{HOM} = \widehat{IOM} - \widehat{IOH} = 90^\circ - \widehat{IOH}$

Donc $\widehat{KOI} = \widehat{HOM}$.

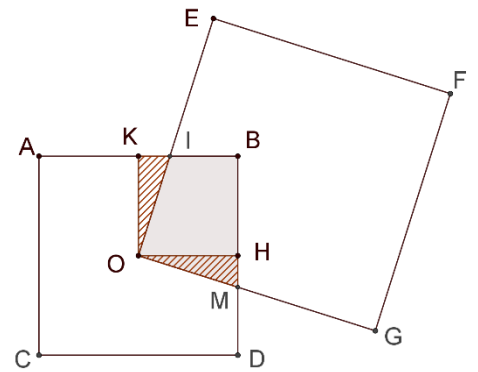
- D'autre part, $OK = OH = \frac{x}{2}$.

Dans les triangles OKI et OHM , on a ainsi :

$OK = OH$ et $\widehat{OKI} = \widehat{OHM}$ et $\widehat{KOI} = \widehat{HOM}$.

Les triangles OKI et OHM sont donc égaux.

Par conséquent : $A_{OKI} = A_{OHM}$.



Finalement, on obtient :

$$A_{\text{grisée}} = A_{IBMO} = A_{IBHO} + A_{OHM} = A_{IBHO} + A_{OKI} = A_{OKBH} = \frac{1}{4} A_{ABCD} = \frac{x^2}{4}$$

L'aire de la surface grisée, c'est-à-dire l'aire du quadrilatère $OIBM$, est égale à un quart de celle du carré $ABCD$:

$$A_{\text{grisée}} = \frac{x^2}{4}$$

2^e méthode :

On veut montrer que les triangles AIO et BMO sont égaux :

- O est le centre de $ABCD$ donc $OA = OB$.
- (OA) et (OB) sont des diagonales du carré $ABCD$ donc $\widehat{OAI} = \widehat{OBM}$.
- $\widehat{AOI} = \widehat{AOB} - \widehat{IOB} = \widehat{IOM} - \widehat{IOB} = \widehat{BOM}$.

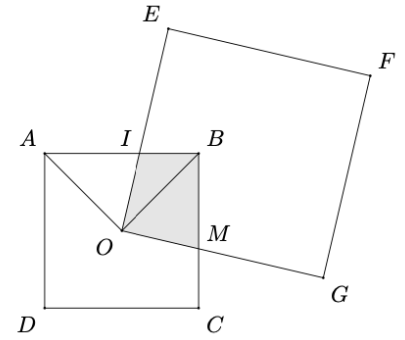
Dans les triangles AIO et BMO , on a ainsi :

$$OA = OB \text{ et } \widehat{OAI} = \widehat{OBM} \text{ et } \widehat{AOI} = \widehat{BOM}.$$

Donc les triangles AIO et BMO sont égaux.

Par conséquent : $A_{AIO} = A_{BMO}$.

$$\text{Finalement : } A_{IBMO} = A_{OBM} + A_{OBI} = A_{AIO} + A_{OBI} = A_{AOB} = \frac{1}{4}A_{ABCD}.$$



L'aire de la surface grisée, c'est-à-dire l'aire du quadrilatère $OIBM$ est égale à un quart de celle du carré $ABCD$:

$$A_{\text{grisée}} = \frac{x^2}{4}$$

4. D'après les questions 1. et 2. :

- Si (OE) est perpendiculaire à un côté de $ABCD$, la surface grisée est un carré tel que son aire vaut le quart de celle du carré $ABCD$.
- Dans le cas où (OE) est portée par une diagonale de $ABCD$, la surface grisée est un triangle tel que son aire vaut le quart de celle du carré $ABCD$.

D'après la question 3. :

Si la surface grisée est un quadrilatère quelconque, l'aire de la surface grisée vaut le quart de celle du carré $ABCD$.

Lorsque le carré $OIEFG$ tourne autour du point O , la surface grisée est soit un triangle, soit un quadrilatère.

Nous avons donc démontré que l'aire de la surface grisée ne change pas quand le carré $OIEFG$ tourne autour du point O .

Exercice 3 Des nombres tempérés

1.

- a. On cherche a et b , deux entiers positifs ou nuls, tels que $13 = \frac{a^2 + b^2}{2}$ soit $a^2 + b^2 = 26$.

On choisit $a = 1$ et $b = 5$. On a : $1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26$.

On obtient : $13 = \frac{1^2 + 5^2}{2}$, donc 13 est 2-tempéré.

- b. On cherche a et b , deux entiers positifs ou nuls, tel que $a^2 + b^2 = 22$.
Ceci s'écrit aussi : $b^2 = 22 - a^2$.

On teste les possibilités :

- Si $a = 1$ alors $a^2 = 1$ et $b^2 = 22 - 1 = 21$ et b n'est pas un entier.
- Si $a = 2$ alors $a^2 = 4$ et $b^2 = 22 - 4 = 18$ et b n'est pas un entier.

- Si $a = 3$ alors $a^2 = 9$ et $b^2 = 22 - 9 = 13$ et b n'est pas un entier.
- Si $a = 4$ alors $a^2 = 16$ et $b^2 = 22 - 16 = 6$ et b n'est pas un entier.
- Si $a = 5$ alors $a^2 = 25$ et $b^2 = 22 - 25 = -3$ et $-3 < 0$.

On remarque que si $a > 4$ alors b^2 sera strictement négatif.

Il n'existe pas deux entiers positifs ou nuls a et b tels que $a^2 + b^2 = 22$.

Donc 11 n'est pas 2-tempéré.

2. Soit n un carré parfait. Il existe donc un nombre entier positif m tel que $n = m^2$.

Ainsi $n = \frac{2m^2}{2} = \frac{m^2+m^2}{2}$ donc n est 2-tempéré.

3. On considère un nombre n qui est 2-tempéré. Il existe donc a et b entiers positifs ou nuls tels que $n = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Ainsi $4n = 4 \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{4(a^2+b^2)}{2} = \frac{(2a)^2+(2b)^2}{2}$. Donc $4n$ est 2-tempéré.

4. On remarque que $10 = \frac{2^2+4^2}{2}$ et $30 = 1 + 29 = 1 + 4 + 25 = 1^2 + 2^2 + 5^2$ donc $10 = \frac{1^2+2^2+5^2}{3}$.
Donc 10 est à la fois 2-tempéré et 3-tempéré.

5.

- a. On considère un nombre entier $k \geq 2$. Alors $k = \frac{k^2}{k} = \frac{k^2+0^2+\dots+0^2}{k}$. Donc k est k -tempéré.

- b. On considère un nombre entier $k \geq 2$.

Soit n un carré parfait. Il existe donc un nombre entier positif m tel que $n = m^2$.

Ainsi $n = \frac{k \times m^2}{k} = \frac{m^2+\dots+m^2}{k}$. Donc n est k -tempéré.

Exercice 4

Aire d'une mandorle

1. Construction.
2. Les points A, H, K sont sur le cercle de centre B et de rayon AB donc $BH = BA = BK$.
Les points B, H, K sont sur le cercle de centre A et de rayon AB donc $AH = AB = AK$.
On en déduit que $BA = BH = BK = AH = AK$. Le quadrilatère $AHBK$ a tous ses côtés de même longueur. C'est donc un losange. De plus, les triangles ABH et ABK sont équilatéraux.
3. Le point O , intersection des diagonales du losange $AHBK$ est donc le milieu de $[KH]$ d'où $KH = 2 \times OH$.
Dans le triangle AOH rectangle en O , on peut écrire, d'après le théorème de Pythagore :
 $AH^2 = AO^2 + OH^2$ soit $1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + OH^2$ soit $OH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
On en déduit que $OH = \sqrt{\frac{3}{4}}$ et $KH = 2 \times OH = 2 \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.
4. L'aire \mathcal{A} du quadrilatère $AHBK$ est la somme des aires des triangles ABH et ABK qui ont la même aire.
Donc $\mathcal{A} = 2 \times \frac{AB \times OH}{2} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dm}^2$
5. L'aire du disque de centre A et de rayon AB est $\pi \times 1^2 = \pi \text{ dm}^2$.
Or $\widehat{HAK} = 2 \times \widehat{HAB} = 120^\circ$ (car $\widehat{HAB} = 60^\circ$ le triangle ABH étant équilatéral) et 120° est le tiers de 360° donc l'aire de la portion du disque de centre A et de rayon AB , délimité par les rayons $[AH]$ et $[AK]$, et passant par le point B est $\frac{\pi}{3} \text{ dm}^2$.
6. L'aire de la mandorle est la somme des aires des deux secteurs angulaires à laquelle on soustrait l'aire du losange soit $2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,23 \text{ dm}^2$.