MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2018

Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie Française

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Le sommé d'un nombre*) et 2 (*Le mandala de Maryam*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Le sommé d'un nombre*) et 3 (*Juxtaposition de rectangles*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Le sommé d'un nombre

On appelle retourné d'un entier naturel n non nul l'entier r_n dont l'écriture décimale est formée des chiffres composant n mais dans l'ordre inverse. Par exemple $r_{483} = 384$.

Le sommé d'un entier naturel n non nul est le nombre $s_n = n + r_n$.
Par exemple $s_{480} = 480 + 84 = 564$.

Partie I

1. Déterminer le sommé de 2 018.
2. Donner un entier n dont le sommé est 99.
3. Déterminer tous les nombres sommés ayant 1 chiffre.
4. Existe-t-il un entier k qui ne soit le sommé d'aucun entier ?
5. Trouver deux entiers n et m distincts tels que $s_n = s_m$.

Partie II

6. Dans cette question on suppose que n est un nombre ayant deux chiffres, c'est-à-dire qu'il s'écrit $n = 10a + b$ avec a et b compris entre 0 et 9, et a non nul (a est le chiffre des dizaines, b le chiffre des unités).
***a*.** Montrer que s_n est divisible par 11.
***b*.** Donner tous les sommés des entiers $n \in [10 ; 99]$.
7. Dans cette question on suppose que n est un nombre ayant trois chiffres qui s'écrit $n = 100a + 10b + c$, avec a, b et c des entiers compris entre 0 et 9, a étant différent de 0. On suppose de plus que s_n est également un nombre ayant 3 chiffres s'écrivant $100u + 10v + w$ avec u, v et w des entiers compris entre 0 et 9, u étant différent de 0.
***a*.** Montrer que $a + c < 10$ et que v est pair.
***b*.** Quelles sont les valeurs possibles de b si $a + c = 9$?
***c*.** Montrer que $u = w$ ou $u = w + 1$.
***d*.** Montrer que si v est pair, u non nul avec $u = w$ ou $u = w + 1$, alors $100u + 10v + w$ est un sommé.
***e*.** Déterminer le nombre de sommés à 3 chiffres de nombres ayant 3 chiffres.

Partie III

On rappelle que la division euclidienne d'un entier n par 10 donne le quotient q et le reste r tels que
$n = 10q + r$ et $0 \leq r < 10$.
Par exemple la division euclidienne de 2 018 par 10 est $(201 ; 8)$ (car $2018 = 10 \times 201 + 8$).
8. On dispose d'une fonction quo(a, d) renvoyant le quotient dans la division euclidienne de a par d et d'une fonction rem(a, d) renvoyant le reste dans la division euclidienne de a par d. Écrire un algorithme qui prend en entrée un entier naturel n non nul et renvoie son sommé.

Partie IV

9. Déterminer le plus petit sommé supérieur ou égal à 2 018.
10. Trouver un entier naturel n non nul tel que $s_n = 10n$.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

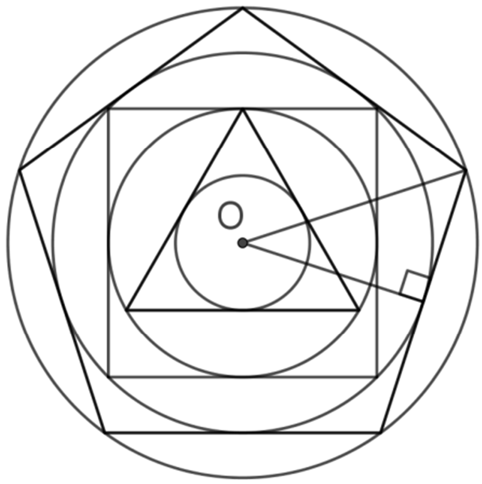
Le mandala de Maryam

Maryam dessine sur une feuille de papier de format A4 (21×29,7 cm).
Elle commence par dessiner un cercle de rayon 2 cm centré au milieu de la feuille, puis un triangle équilatéral dont les trois côtés sont tangents au cercle précédent.
1. Quelle est l'aire du triangle équilatéral ?

Elle dessine le cercle circonscrit au triangle équilatéral, puis un carré dont les côtés sont tangents à ce cercle.
2. Quelle est l'aire du carré ?

Maryam poursuit en dessinant tour à tour le cercle circonscrit au dernier polygone tracé, puis un polygone régulier comptant un côté de plus que le précédent dont les côtés sont tangents au cercle. Elle poursuit son travail jusqu'à ce que le cercle qu'elle devrait tracer ne tienne plus dans la feuille.
3. ***a.*** Pour un entier n supérieur ou égal à 3, exprimer le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier à n+1 côtés en fonction du rayon du cercle circonscrit au polygone régulier à n côtés dans le processus précédent.
3. *b.* Proposer un algorithme renvoyant le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier à n côtés. Quel est le résultat obtenu pour $n = 15$?
3. *c*. Proposer un algorithme permettant de déterminer le nombre de cercles qui figurent finalement sur le dessin de Maryam et donner ce nombre.

4. Si Maryam dessinait sur une feuille de papier de format A2 (42×59,4cm), pourrait-elle tracer 100 cercles ? 200 cercles ? Quelle conjecture formuler ?



(La figure n'est évidemment pas exacte)

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Juxtaposition de rectangles

En juxtaposant deux rectangles R_1 et R_2 dont les dimensions ℓ_1, L_1, ℓ_2, L_2 sont toutes différentes, on obtient un polygone P_2 ayant 6 sommets (Fig. 1) ou 8 sommets (Fig. 2). On ne peut donc pas obtenir un rectangle.

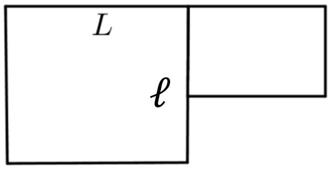


Fig. 1

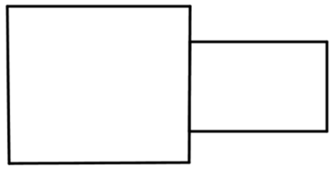
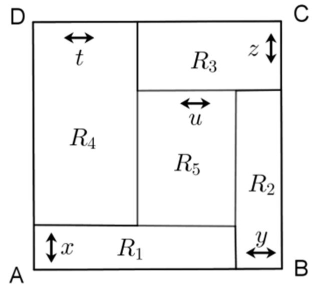


Fig. 2

Plus généralement, on admettra qu'en juxtaposant 3 ou 4 rectangles ayant des dimensions toutes différentes, on ne peut pas obtenir un rectangle.

1. On peut obtenir un carré en juxtaposant 5 rectangles R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 dont les dimensions constituent les entiers de 1 à 10. Sur le schéma ci-contre (qui n'est pas exact), les dimensions données sont :



$x = 1, y = 2, z = 3, t = 5$ et $u = 4$

Quelles sont les autres dimensions des rectangles (on rappelle que chaque entier de 1 à 10 est utilisé une et une seule fois) ?

Dans la suite, on s'intéresse aux entiers n pour lesquels on peut obtenir un carré de côté n en juxtaposant 5 rectangles R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 dont les dimensions constituent les 10 premiers entiers positifs et on désigne par $ABCD$ un tel carré.

2. ***a.*** Justifier que $n \geq 10$.
b. Démontrer que $n \geq 11$. On pourra utiliser la propriété admise au début de l'énoncé pour étudier le cas d'un carré de côté 10.

3. On désigne respectivement par R_1, R_2, R_3, R_4 les rectangles dont un sommet est A, B, C, D.
a. Démontrer que le rectangle R_5 n'a aucun sommet sur les côtés du carré $ABCD$.
b. Démontrer que le périmètre du carré $ABCD$ est inférieur ou égal à 52. Que peut-on en déduire pour n ?

4. ***a***. Démontrer que si $n = 12$, alors les dimensions du rectangle intérieur sont 1 et 6.
b. En déduire que $n \neq 12$.

5. Quels sont les entiers n pour lesquels on peut obtenir un carré de côté n en juxtaposant 5 rectangles dont les dimensions constituent les 10 premiers entiers positifs ?