MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique –Orient – Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Exercices académiques

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 5.

Les autres candidats (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques ou candidats de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 6.

Exercice 4 (à traiter par tous les candidats)

Une usine produit chaque jour au total 100 litres de déchets liquides : des rouges et des verts. Ces déchets liquides sont placés dans deux cuves appelées R pour le liquide rouge et V pour le liquide vert. À la fin de chaque journée, la cuve la plus remplie est vidée dans une citerne en privilégiant le bac R en cas d'égalité de remplissage des deux cuves. On se pose alors la question suivante :

Quelle doit être la capacité de chaque cuve pour que chaque jour, aucune ne déborde ?

Au début du mois, les deux cuves sont vides. Le premier jour du mois, l'usine produit 50 litres de déchets de chaque couleur, on videra alors la cuve R et la cuve V contiendra 50 litres de déchets. Le deuxième jour, l'usine produit 30 litres de déchets rouges et 70 litres de déchets verts ; avant de vidanger la cuve la plus remplie, R contiendra 30 litres et V en contiendra 120, on videra donc la cuve V.

Le tableau suivant illustre la situation.

Jour		R	V
0	État initial	0	0
1	Déchets produits	50	50
	État des cuves avant vidange	50	50
	État des cuves après vidange	0	50
2	Déchets produits	30	70
	État des cuves avant vidange	30	120
	État des cuves après vidange	30	0

1. Établir un scénario où la cuve V contient 80 litres après vidange, en complétant, après l'avoir recopié et allongé le tableau suivant :

Jour		R	V
0	État initial	0	0
1	Déchets produits		
	État des cuves avant vidange		
	État des cuves après vidange		
...	...	...	...

2. Expliquer comment on pourrait, en partant des deux cuves vides, arriver à une situation où la cuve V contient au moins 99 litres après vidange.
3. Montrer que la capacité de la cuve V doit être au moins de 200 litres pour ne pas risquer de déborder.
4. On suppose qu'un matin, la cuve R contient r litres de déchets et que la cuve V en contient v litres. Et on note r' et v' les contenus des cuves R et V le soir après vidange.
   Montrer que si $r + v \leq 100$ alors on a également $r' + v' \leq 100$.
5. Conclure.

6. Une autre usine produit chaque jour 100 litres de déchets liquides, mais de trois sortes : des rouges, des verts et des bleus, que l'on place dans trois cuves notées R, V et B. On vide en fin de journée comme précédemment la cuve la plus remplie en privilégiant R, puis V en cas d'égalité des contenus.
Par exemple, on pourrait avoir la situation illustrée par le tableau suivant :

Jour		R	V	B
0	État initial	0	0	0
1	Déchets produits	50	50	0
	État des cuves avant vidange	50	50	0
	État des cuves après vidange	0	50	0
2	Déchets produits	30	10	60
	État des cuves avant vidage	30	60	60
	État des cuves après vidage	20	0	60

a. Montrer que l'on pourrait, au bout d'un certain nombre de jours, en partant des trois cuves vides arriver à la situation où les cuves V et B contiennent chacune 90 litres après vidange.

b. Soit a un réel inférieur à 100. Montrer que si un soir après vidange, les cuves R, V et B contiennent respectivement 0, $100 - a$ et $100 - a$ litres, alors le jour suivant, il est possible qu'elles contiennent respectivement 0, $100 - \frac{2}{3}a$ et $100 - \frac{2}{3}a$ litres.

c. En déduire que la cuve B doit pouvoir contenir au moins 250 litres pour ne pas risquer de déborder.

d. On suppose qu'un matin les cuves R, V et B contiennent respectivement r, v et b litres de déchets. Et on note r', v' et b' les contenus respectifs des cuves R, V et B le soir après vidange.
On suppose que $r + v + b \leq 200$. Montrer que $r' + v' + b' \leq 200$.
Que peut-on en déduire ?

e. Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, montrer que si $b \leq 150$ alors on ne peut pas avoir $b' > 150$.

f. Conclure.

Exercice 5 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

Nombres atteignables

On dispose du programme de calcul suivant :

On part de l'entier $N = 4$.

À chaque étape, on utilise **au choix** une des règles suivantes :

(1) : on divise le nombre obtenu par 2, s'il est pair ;

(2) : on multiplie le nombre obtenu par 10 ;

(3) : on multiplie le nombre obtenu par 10 puis on ajoute 4 au résultat.

On s'intéresse aux nombres que l'on peut obtenir et qui seront dits *atteignables*.

On peut par exemple obtenir 11 en utilisant successivement la règle (3) puis deux fois la règle (1) :

$$\mathbf{4} \underset{(3)}{\rightarrow} \mathbf{44} \underset{(1)}{\rightarrow} \mathbf{22} \underset{(1)}{\rightarrow} \mathbf{11}$$

On dira que 11 est *atteignable* (et également : 4, 44 et 22).

1. Montrer que tous les entiers compris entre 1 et 10 sont atteignables. On notera les réponses comme sur le schéma précédent.

On considère dans toute la suite un entier naturel non nul a.

2. Montrer que si $4a$ est atteignable alors $10a, 10a + 1, 10a + 2$ et $10a + 4$ le sont également.
3. Montrer que si $4a + 2$ est atteignable alors $10a + 5$, $10a + 6$ et $10a + 7$ le sont également.
4. Montrer que si $8a + 2$ est atteignable alors $10a + 3$ l'est également.
5. Montrer que si $8a + 6$ est atteignable alors $10a + 8$ l'est également.
6. En déduire que tout entier naturel non nul dont le chiffre des unités est différent de 9 est atteignable.
7. Montrer que 49 est atteignable.
8. Montrer que tout entier naturel non nul est atteignable.
9. Qu'en est-il si l'on part de l'entier naturel $N = 3$?

Exercice 6 (candidats de la voie générale ne suivant pas l'enseignement de « spé maths » et tous les candidats de la voie technologique)

Sac de billes

On a retrouvé un vieux sac de billes portant l'inscription :

« Je contiens 409 billes en bois, les autres billes sont en terre. »

1. Après avoir compté les billes en terre de ce sac, on déduit qu'il y a en tout 2024 billes.
   Quel est le pourcentage de billes en bois ? On donnera le résultat arrondi au dixième.
2. Finalement, on retrouve une bille en terre non comptée au fond du sac.
   Quel est maintenant le pourcentage de billes en bois ? On donnera le résultat arrondi au dixième.
3. Une autre personne affirme après avoir recompté toutes les billes d'un autre sac :
   « Le sac contient 412 billes en bois, ce qui correspond à 20,3 % du nombre de billes du sac. »
   Sachant que la personne a donné un résultat arrondi au dixième, déterminer le minimum et le maximum de billes dans le sac pour cette affirmation.
4. Déterminer le nombre de billes d'un sac portant l'inscription :
   « Je contiens moins de 500 billes et exactement 20,25 % de billes en bois. »
5. Un sac de billes porte l'inscription :
   « Je contiens 40,0 % de billes en bois, les autres billes sont en terre. »
   En supposant que ce résultat a été arrondi au dixième, déterminer le nombre maximal n de billes en bois qui permettrait de connaître exactement le nombre total N de billes du sac.