MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2026

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique –Orient – Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats et candidates qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat ou la candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il ou elle l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené ou elle a été amenée à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Exercices académiques

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats et candidates de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 5.

Les autres candidats et candidates (candidats et candidates ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques ou de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 6.

Exercice 4 (à traiter par tous les candidats et toutes les candidates)

Dans tout l'exercice, on considère des ensembles d'entiers naturels non nuls comprenant au moins un élément. On précise qu'un ensemble est constitué d'éléments deux à deux distincts (tous différents les uns des autres).

On dira qu'un ensemble est *juste* si la moyenne de ses éléments est un entier.
Par exemple, l'ensemble {1, 2, 9} est juste car $\frac{1+2+9}{3} = 4$ mais l'ensemble {1, 2, 10, 12} ne l'est pas car $\frac{1+2+10+12}{4} = 6,25$.

De plus, on appellera *top-dix*, tout ensemble **juste** dont le plus grand élément est 10.
Par exemple, les ensembles justes {2, 3, 7} et {1, 2, 10, 11} ne sont pas des top-dix.

Enfin on appellera *moyenne* d'un ensemble fini la moyenne de ses éléments. Ainsi, le top-dix {2, 3, 10} a pour moyenne 5.

1. Donner deux top-dix de moyenne 6.

2. **a.** Déterminer le nombre minimum d'élément(s) d'un top-dix.
b. Déterminer le nombre maximum d'éléments d'un top-dix. (On rappelle que deux éléments quelconques d'un ensemble sont différents).

3. **a.** Déterminer la moyenne minimale d'un top-dix à 5 éléments.
b. Déterminer la moyenne minimale d'un top-dix à 6 éléments.

4. Existe-t-il des top-dix de moyenne 1 ? de moyenne 2 ? de moyenne 3 ? de moyenne 4 ?

5. Déterminer toutes les moyennes possibles d'un top-dix.

6. On définit de manière analogue les top-cent.
Déterminer toutes leurs moyennes possibles.

Exercice 5 (candidats et candidates de la voie générale suivant la « spé maths »)

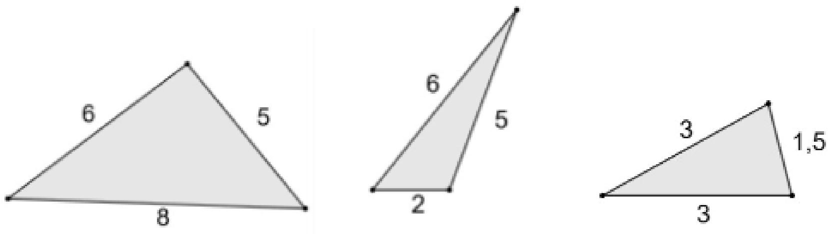
Une unité de longueur étant donnée, on considère un triangle ABC dont on notera a, b et c les longueurs respectives des côtés opposés aux sommets A, B et C.

Soit n un entier naturel, $n > 1$. On dira qu'un triangle est n-*pythagorien* si la somme des carrés des longueurs de deux de ses côtés est égale à n fois le carré du troisième côté.
Un triangle est dit *mutipythagorien* s'il existe un entier $n > 1$ tel que ce triangle est n-*pythagorien.*

On notera d'autre part m_a, m_b et m_c les longueurs respectives des médianes du triangle ABC issues des sommets A, B et C et on notera G le point de concours de ces médianes.

On rappelle que les médianes sont concourantes et que leur point de concours est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet : par exemple, en notant G *le point de concours des médianes du triangle* ABC*, on a* $\mathrm{CG} = \frac{2}{3} m_c$.

1. **Exemples**
   - **a.** Parmi les triangles ci-dessous, lesquels sont multipythagoriens ?



   - **b.** Donner un exemple de triangle 2-pythagorien.
   - **c.** Un triangle rectangle peut-il être multipythagorien (c'est-à-dire n-*pythagorien* pour un entier $n > 1$) ?

2. **Un cas particulier** : on suppose que $a = 5$, $m_c = 4{,}5$ et $m_b = 6$.
   - **a.** Quelle est la nature du triangle BCG ?
   - **b.** Démontrer que le triangle ABC est multipythagorien.
   - **c.** Démontrer que m_a, m_b et m_c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.
   - **d.** Que vaut l'aire du triangle ABC ?

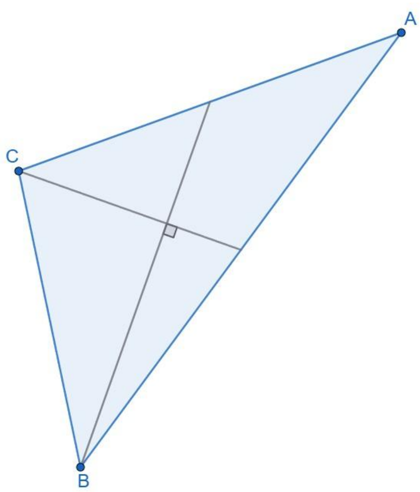
3. **Longueur d'une médiane dans le cas général**

   Exprimer m_b^2 en fonction de a^2, b^2 et c^2.

   On pourra admettre l'identité du parallélogramme qui affirme que la somme des carrés des longueurs des deux diagonales d'un parallélogramme ABCD *est égale à la somme des carrés des longueurs de ses quatre côtés, c'est-à-dire que* $2\mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2$.

4. **Médianes se coupant en angle droit**

   On suppose dans cette question que les médianes issues de B et de C se coupent en angle droit.



   - **a.** Démontrer que m_a, m_b et m_c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.
   - **b.** Démontrer que le triangle ABC est multipythagorien. On notera $\mathcal{R}$ la relation liant alors a^2, b^2 et c^2.

5. **Réciproque**

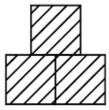
   Suffit-il que a, b et c soient liés par la relation $\mathcal{R}$ pour que les médianes issues de B et de C se coupent en angle droit ?

Exercice 6 (candidats et candidates de la voie générale ne suivant pas l'enseignement de « spé maths » ou de la voie technologique)

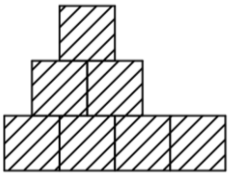
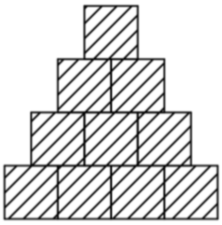
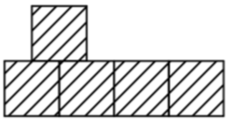
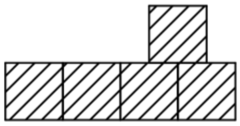
On considère que l'on a à notre disposition des cubes de côté 1, tous identiques, et l'on souhaite construire des empilements en plaçant les cubes sur une seule rangée.

Un empilement est *valide* s'il respecte les conditions suivantes :

- La base de l'empilement doit être constitué d'une seule ligne de cubes, tous côte à côte.
- Un cube d'un étage supérieur repose toujours sur deux cubes de l'étage inférieur de la manière ci-contre.
- Tous les cubes d'un étage doivent être côte à côte afin de former une seule ligne.

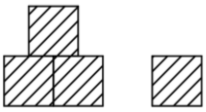
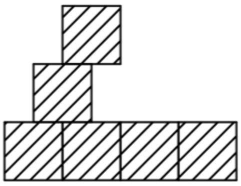
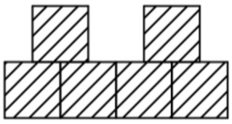
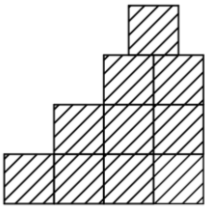
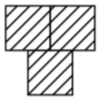


On propose quelques exemples d'empilements valides différents :

- La base d'un empilement valide est appelée premier étage. L'étage reposant sur la base est appelé deuxième étage, et celui reposant sur le deuxième étage est appelé troisième étage, et ainsi de suite.
- Si n est un entier naturel non nul, on appelle **empilement de base n** un empilement valide dont la base est constituée d'une ligne de n cubes. On note alors u_n le nombre d'empilements différents de base n.
- Soit n un entier naturel non nul, on appelle **empilement de n étages** un empilement valide qui compte exactement n étages comptant chacun au moins un cube.

On propose quelques exemples d'empilements non valides différents :

				
La base n'est pas constituée d'une seule ligne	Le cube du 3e étage ne repose pas exactement sur deux cubes	Le 2e étage n'est pas constitué d'une seule ligne de cubes	Les cubes du 2e et du 3e étage ne reposent pas exactement sur deux cubes	Les cubes du 2e étage ne reposent pas chacun sur deux cubes

Dans la suite de l'exercice, on ne considère que des empilements valides.

1. Sur la copie, dessiner un empilement valide de 5 étages.

2. Un enfant construit un empilement de 3 étages et de base 5.
  a. Quel est le nombre minimum de cubes que cet enfant peut avoir utilisés ?
  b. Quel est le nombre maximum de cubes que cet enfant peut avoir utilisés ?

3. Soit n un entier naturel non nul.
  a. Exprimer, en fonction de n, le nombre maximal d'étages d'un empilement de base n.
  b. Exprimer, en fonction de n, le nombre maximal de cubes composant un empilement de base n.
  c. Exprimer, en fonction de n, le nombre minimal de cubes composant un empilement de n étages.

4. Combien valent u_1, u_2, u_3, u_4 ? *(On pourra dessiner tous les empilements correspondants).*

5. On veut construire un empilement de base 5.
  a. Combien cet empilement peut-il avoir de cubes à l'étage 2 ?
  b. En déduire une expression de u_5 en fonction de u_4, u_3, u_2, u_1.
  c. Combien d'empilements de base 5 peut-on construire ?