

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices de l'académie de Versailles

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 4 et 5.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 4 et 6.

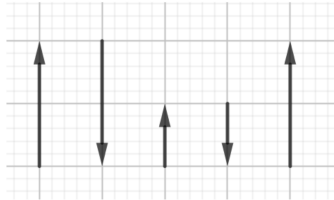
Exercice académique 4 (à traiter par tous les candidats)

Deux pilotes pour un robot

Un robot se déplace en ligne droite, animé par un moteur. Une instruction de son programme lui fait faire demi-tour chaque fois qu'il a parcouru a cm, une autre lui fait faire demi-tour chaque fois qu'il a parcouru b cm. Lorsque ces deux instructions doivent être exécutées simultanément, le robot continue en ligne droite.

Ainsi, si $a = 2$ et $b = 5$, le robot va parcourir 2 cm dans une direction, puis 2 cm dans la direction contraire puis 1 cm dans la première direction. Il aura alors parcouru 5 cm et fera demi-tour une troisième fois.

Les vecteurs associés aux cinq premiers mouvements sont :



Au départ le robot est placé au centre d'une table de rayon 1 m.

1. On suppose que $a = 5$ et $b = 8$.

a. Décrire les 16 premiers cm parcourus par le robot.

b. Montrer qu'après avoir parcouru 40 cm, le robot repart dans le sens opposé à celui qu'il avait au départ.

c. Le robot risque-t-il de tomber de la table ?

2. On suppose maintenant que $a = 5$ et $b = 9$.

a. Après avoir parcouru 45 cm, dans quel sens le robot repart-il ?

b. Le robot risque-t-il de tomber ?

3. Si $a = 6$ et $b = 14$, le robot pourra-t-il tomber ?

4. On suppose maintenant que lorsque les deux instructions doivent être exécutées en même temps, le robot fait demi-tour.

Peut-on programmer le robot de manière à ce qu'il tombe de la table quel qu'en soit le rayon ?

Exercice académique 5 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Colorations

Dans cet exercice, pour différentes valeurs de l'entier n , on considère un polygone à n sommets du plan. Chaque segment reliant deux de ces n sommets est coloré soit en bleu, soit en rouge. Un triangle est dit *monochrome* si ses trois sommets sont des sommets du polygone et si ses trois côtés sont de la même couleur.

1. Dans le cas $n = 4$, donner un exemple de coloration des six segments reliant les sommets d'un quadrilatère qui ne crée aucun triangle monochrome.
2. Dans le cas $n = 5$, donner un exemple de coloration des dix segments reliant les sommets d'un pentagone qui ne crée aucun triangle monochrome.
3. Dans toute cette question, on suppose que $n = 6$. On se donne donc un hexagone ABCDEF et une coloration arbitraire des quinze segments reliant deux à deux les sommets de cet hexagone.
 - a. Justifier que, parmi les segments reliant le sommet A aux autres sommets, il y en a au moins trois de la même couleur. En déduire que la coloration crée au moins un triangle monochrome.
 - b. Si les points X, Y et Z sont trois des sommets de l'hexagone, on dit que *le couple (X, Y) est rouge-bleu de sommet Z* si le segment [XZ] est rouge et le segment [YZ] bleu. Justifier qu'il y a au maximum 6 couples « *rouge-bleu de sommet A* ».
 - c. En déduire que, parmi les vingt triangles dont les sommets sont ceux de l'hexagone, il y a au moins deux triangles monochromes.
 - d. Donner un exemple de coloration des quinze segments reliant deux à deux les sommets de l'hexagone qui crée exactement deux triangles monochromes.
4. Dans cette question, on suppose que $n = 7$.
 - a. Donner un exemple de coloration des vingt-et-un segments reliant deux à deux les sommets d'un heptagone qui crée exactement quatre triangles monochromes.
 - b. Prouver que, quelle que soit la coloration choisie des segments reliant les sommets d'un heptagone, elle crée au moins quatre triangle monochromes.

Exercice académique 6 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Sauvé par la littérature

Léo passe un examen de culture générale. Il a convenablement répondu à 70% des questions d'histoire, 60% des questions portant sur les arts, 55% des questions portant sur la littérature et 20% des questions portant sur les sciences.

La première partie de l'examen ne comportait que des questions d'histoire et de littérature. Sur l'ensemble, 60% de ses réponses ont été correctes.

La seconde partie a été moins heureuse : sur l'ensemble des questions portant sur les arts et les sciences, le pourcentage de ses réponses correctes est seulement 40%.

On appellera respectivement (H, h) , (A, a) , (L, l) , (S, s) les couples représentant le nombre de questions et le nombre de réponses correctes dans chacun des domaines.

Le verdict tombe : Sur l'ensemble, Léo a fourni une majorité de réponses correctes.

Quelle est la valeur minimale du rapport L/S permettant ce résultat ?