Olympiades nationales de mathématiques 2018

Académie de Versailles

Mercredi 14 mars 2018

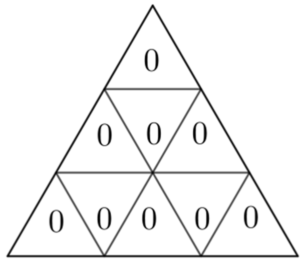
La partie proprement académique de l'épreuve débute une dizaine de minutes après la fin de la première partie (exercices nationaux). Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur. Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

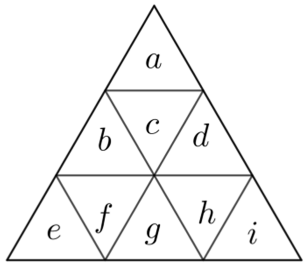
Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 4 (*Formation en triangle*) et 5 (*Coin coupé*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 4 (*Formation en triangle*) et 6 (*Sportifs, à vos calculettes !*)

Exercice académique numéro 4 (à traiter par tous les candidats)

Formation en triangle



Un triangle équilatéral est divisé en neuf petits triangles équilatéraux. Initialement, le nombre 0 est inscrit dans chacune des neuf cases. Une *opération* consiste à choisir deux petits triangles équilatéraux ayant un côté commun et ajouter 1 à chacun des nombres inscrits dans ces deux petits triangles.
Dans la suite, les cases, et les contenus, seront notées $a, b, c, d, e, f, g, h, i$.



1. À partir de la situation initiale, on veut que les neuf nombres inscrits dans les triangles soient 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8. Donner, en la détaillant, une suite d'opérations permettant de réaliser cet objectif.

2. À partir de la situation initiale, on veut que les neuf nombres inscrits dans les triangles soient 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Donner, en la détaillant, une suite d'opérations permettant de réaliser cet objectif.

3. À partir de la situation initiale, on effectue un certain nombre d'opérations. On note alors S la somme des nombres figurant dans les cases c, f et h et T la somme des nombres figurant dans les six autres cases. Prouver que $S = T$.

4. À partir de la situation initiale, on effectue un certain nombre d'opérations.
a. On constate alors qu'on peut trouver un entier naturel n tel que les nombres figurant dans les cases soient

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8.$$

Prouver que $n \leq 2$.
b. Quels sont les entiers n pour lesquels on peut effectivement obtenir la configuration ci-dessus ?

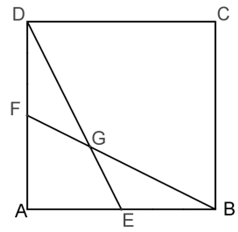
5. Soit m un entier naturel. Est-il possible qu'après une suite d'opérations les neuf nombres inscrits dans les petits triangles soient tous distincts et tous des puissances de m ?

Exercice académique numéro 5 (à traiter par les candidats de la série S)

Coin coupé

1. Deux cerfs-volants

On considère un carré ABCD de centre O, de côté 1 et les milieux respectifs E et F des côtés [AB] et [AD]. Les segments [DE] et [BF] se coupent en G.



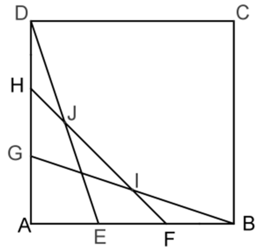
a. Démontrer que la longueur OG est égale à $\frac{\sqrt{2}}{6}$

b. En déduire l'aire du triangle BDG.

c. Quel est le rapport des aires des quadrilatères ABGD et BCDG ?

2. Deux pentagones

Le carré ABCD a toujours pour côté 1. Dans cette nouvelle situation, les points E et F sont situés au tiers et aux deux-tiers du segment [AB] en allant de A vers B, et les points G et H dessinent la même configuration sur le segment [AD]. Les segments [DE] et [FH] se coupent en J, les segments [BG] et [FH] se coupent en I.



a. Démontrer que I et J sont les milieux respectifs de [BG] et [DE].

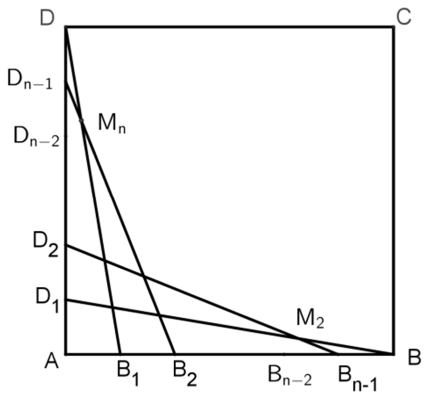
b. Démontrer que le rapport $\frac{\text{aire du pentagone ABIJD}}{\text{aire du pentagone BIJDC}}$ est égal à $\frac{5}{13}$.

3. Étude cartésienne générale

On donne un entier n non nul.

On rapporte le plan au repère orthonormé $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$. Sur chacun des côtés [AB] et [AD] du carré ABCD, on place $n-1$ points : $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \dots, \mathrm{B}_{n-1}$ sur le côté [AB], $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \dots, \mathrm{D}_{n-1}$ sur le côté [AD], de sorte que les graduations ainsi créées soient régulières. On construit alors les segments $[\mathrm{B}_1\mathrm{D}], [\mathrm{B}_2\mathrm{D}_{n-1}], \dots [\mathrm{BD}_1]$, comme sur la figure ci-contre. Si besoin est, on pose $\mathrm{B}_n = \mathrm{B}$, $\mathrm{D}_n = \mathrm{D}$ et $\mathrm{B}_0 = D_0 = \mathrm{A}$

On se demande quelle est l'aire du « coin coupé » (aire limitée par les côtés [AB] et [AD] et la ligne polygonale qui va de B à D en coïncidant tour à tour avec des parties des segments tracés.



On suppose que le nombre n est assez grand pour que les calculs proposés soient légitimes.

a. Pour tout entier p non nul inférieur ou égal à n, calculer l'abscisse du point d'intersection M_p des droites $(\mathrm{D}_p\mathrm{B}_{n+1-p})$ et $(\mathrm{D}_{p-1}\mathrm{B}_{n+2-p})$.

b. Quelle est l'aire du triangle $\mathrm{D}_p\mathrm{D}_{p-1}\mathrm{M}_p$?

c. Quelle est l'aire du « coin coupé » ?

On pourra utiliser les résultats suivants, vrais pour tout entier non nul p *:*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d. Montrer que, pour tout entier n, l'aire du coin coupé est supérieure à $\frac{1}{6}$.

Exercice académique numéro 6 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Sportifs, à vos calculettes !

Dans cet exercice, on examine trois situations dans lesquelles les participants et les organisateurs de rencontres sportives sont amenés à faire des comptes. Les trois parties sont ***indépendantes*** *et les candidats les traitent dans l'ordre qui leur convient.*

« Balles neuves ! »

Un certain tournoi de tennis oppose les participants dans des parties desquelles est déclaré vainqueur le premier joueur à remporter deux sets (parties « en trois sets »). Le score de chaque set peut être :
7 jeux à 6 (à l'issue d'un *jeu décisif*), 7 jeux à 5, 6 jeux à 4, 6 jeux à 3, 6 jeux à 2, 6 jeux à 1, 6 jeux à 0.
On annonce ainsi le score détaillé d'une partie : 6 – 4, 6 – 2, par exemple, ou 7 – 6, 3 – 6, 7 – 5, etc.
1. Une partie de 36 jeux sans jeu décisif est-elle possible ?
2. Dans une partie, les joueurs ont disputé 36 jeux. Le vainqueur et le vaincu ont gagné chacun 18 jeux. Quel peut être le score détaillé d'une telle partie ?
3. Lors d'une partie, le nombre total de jeux disputés a été 25.
a. Quels en ont été les scores s'il n'y a eu que deux sets ?
b. Dans tous les cas, combien de jeux le perdant a-t-il gagnés, au minimum ?

Division ou soustraction ?

Dans certains championnats, en football par exemple, les équipes sont classées selon le nombre des points qu'elles ont obtenus, mais il arrive qu'on doive départager deux équipes ayant le même total.
Par exemple, une poule disputée par 5 équipes a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-contre. Toutes les équipes totalisent une victoire, deux matchs nuls et une défaite. Elles doivent être départagées.
Deux critères sont utilisés, ici ou là : *le quotient* du nombre de buts marqués par le nombre de buts encaissés et *la différence de buts* (différence entre ces deux nombres).

Équipe 1–Équipe 2	Score
A – B	3 – 0
A – C	2 – 2
A – D	1 – 1
A – E	0 – 1
B – C	6 – 0
B – D	2 – 2
B – E	3 – 3
C – D	3 – 1
C – E	2 – 2
D – E	3 – 1

1. Quelles sont les *quotients* des équipes ? Quel est leur classement selon ce critère ?
2. Quelles sont leurs *différences de but* ? Quel est leur classement selon ce critère ?
3. Sans changer l'issue d'aucune des dix rencontres (même vainqueur ou résultat nul), en modifiant seulement des scores, peut-on imaginer que le classement selon la *différence de buts* soit dans l'ordre B D A E C ?

Lancers francs

Au cours d'une saison de championnat, une basketteuse peut être amenée à tirer plusieurs dizaines de lancers francs (tir direct consécutif à une faute adverse). Les journaux spécialisés publient des statistiques concernant cet acte de jeu.

1. Clara s'améliore
À l'issue de la première partie de la saison, Clara atteint un taux de réussite aux lancers francs inférieur à 60%. Elle travaille à l'entraînement ce geste technique et, à la fin de la saison, son taux de réussite dépasse les 60%. Donner un exemple montrant qu'il est possible qu'à aucun moment elle n'ait eu un taux de réussite exactement égal à 60%.

2. … mais Céline reste plus adroite
Céline avait un taux de réussite inférieur à 75% en milieu de saison, mais termine avec un taux supérieur à 75%. Prouver qu'à un certain moment son taux de réussite a été exactement égal à 75%.