MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique – Orient

Candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les énoncés et les copies sont également ramassées.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices nationaux (2 heures).

Chaque candidat traite deux exercices nationaux.

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder entre 40 minutes et une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième exercice quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerres et calculatrices sont autorisés selon la réglementation en vigueur.

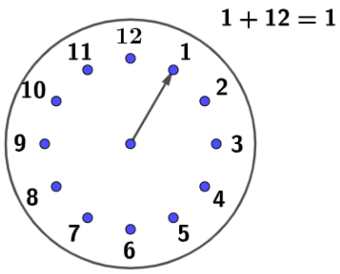
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'énoncé national comporte 4 pages.

Exercice 1 (tous les candidats)

Plus fort !

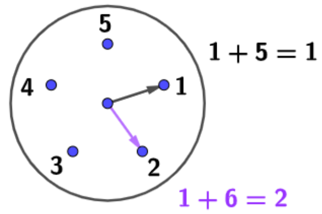
Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. Certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.



1. *Une montre atypique.* Quand on regarde une montre du commerce et que la petite aiguille ajoute 12 (heures) à la position graduée sur 1 (heure), elle revient sur la position 1 (heure), comme dans le croquis ci-contre.

En quelque sorte, $1 + 12 = 1$.

Plutôt que de diviser la journée en 12 heures, on décide arbitrairement de la diviser en $n \geq 2$ heures.



a. On choisit $n = 5$, croquis ci-contre. Justifier qu'en suivant le mouvement de la petite aiguille, on a $1 + 6 = 2$. À quoi s'identifierait $1 + 12$?

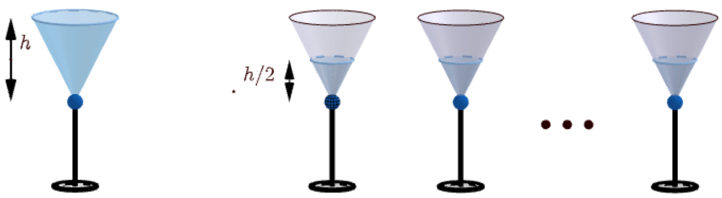
b. Comment choisir n de sorte que, cette fois, $1 + 12 = 2$? Dessiner une horloge correspondante.

2. *Traduction.* Exprimer ce que signifient les phrases suivantes (lues pratiquement telles quelles dans des médias !) :

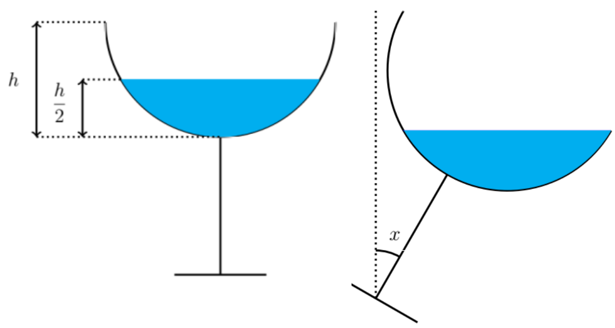
a. « Il est indéniable que Beethoven n'aurait pas été le grand compositeur qu'il a été s'il n'avait pas été sourd » en utilisant le moins de négations possible.

b. « La mairie rejette la demande d'annulation déposée par l'association *Organisons le premier Championnat de vitesse d'escargots !* de l'arrêté municipal interdisant leur ramassage » en la remplaçant par deux ou trois phrases plus simples et plus claires montrant que vous l'avez bien comprise.

3. *Celle qui fait des mathématiques, c'est celle qui ne boit pas.* Une coupe de champagne conique est remplie à ras bord. Mais la personne à qui la coupe est destinée n'en veut pas. Elle la vide dans d'autres coupes initialement vides et identiques, en les remplissant chacune jusqu'à la moitié de leur hauteur h. Combien de coupes remplit-elle ainsi ?



4. *Ou alors juste un peu.* Un verre est formé par une demi-sphère (représentée en coupe par un demi-cercle sur le dessin). Le verre est rempli jusqu'à la moitié de sa hauteur h. Quel est l'angle d'inclinaison maximum x selon lequel on peut pencher ce verre sans renverser de liquide ?

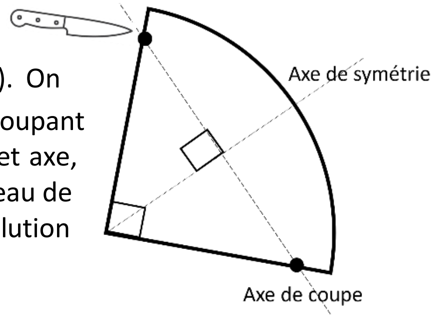


5. *Mais les mathématiciens ont le droit de manger.* Un groupe d'une centaine de personnes réserve un dîner dans un restaurant niçois avec vue sur mer. En temps normal, le prix du repas est de 40 euros par personne. Mais le gérant exige que sa recette (c'est-à-dire le total de ce que le groupe payera) atteigne au minimum 4 000 euros, ceci afin de couvrir les risques qu'il prend en leur réservant les tables si trop de convives se désistent.

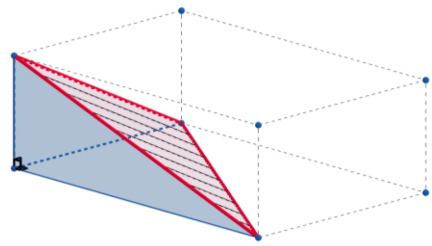
a. Justifier que, si $n \geq 100$ personnes viennent, elles payeront bien 40 euros chacune, mais que si, du fait de défections, seulement $n < 100$ personnes viennent, elles payeront alors davantage chacune. Combien paye chacun lorsque seulement 90 personnes viennent ?

b. Le groupe obtient une subvention de 1 000 euros de l'État. Combien paye chacun lorsque seulement 90 personnes viennent ? Lorsque 120 personnes viennent ? Combien de personnes doivent venir, exactement, pour que le prix que chacun paye soit minimal ?

6. *Et de prendre un dessert.* Soit une portion de tarte représentée par le secteur angulaire ayant la forme d'un quart de disque (l'ouverture angulaire vaut $\frac{\pi}{2}$). On souhaite la diviser en deux parties égales. Mais d'une manière originale : en la coupant non pas le long de son axe de symétrie, mais le long d'une perpendiculaire à cet axe, dessin ci-contre. Ainsi, l'aire du morceau de gauche serait égale à l'aire du morceau de droite. Où faut-il couper ? (On introduira toutes les variables nécessaires à la résolution de ce problème.)



7. *Pythagore 3D (théorème de de Gua).* Montrer que, dans un tétraèdre trirectangle (trois angles droits en un sommet), c'est-à-dire un coin de parallélépipède rectangle, le carré de l'aire de la face oblique est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.



Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

Recherche d'équilibre : les nombres sur le fil

On rappelle que pour tout entier naturel non nul m :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

et, de façon plus générale, que pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul b :

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + \cdots + (n+b) = \frac{b(2n+b+1)}{2}$$

Lorsque n est un entier au moins égal à 2, on dit que n est un *nombre équilibré* si on peut trouver un entier naturel non nul b tel que :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+b)$$

Dans ce cas, l'entier b est unique et s'appelle la *balance* de l'entier n.

Par exemple, 35 est un nombre équilibré, car :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 34 = 595$$

et

$$(35+1) + (35+2) + \cdots + (35+14) = 595$$

La balance de 35 est égale à 14.

1. *Quelques exemples*
a. Montrer que 6 est un nombre équilibré et préciser sa balance.
b. Montrer que 7 n'est pas un nombre équilibré.
c. Montrer que 204 est un nombre équilibré de balance 84.

2. *Lien entre nombres équilibrés et carrés parfaits***.** On rappelle qu'un entier naturel c est un carré parfait s'il existe un entier e tel que $c = e^2$. Ainsi, $16 = 4^2$ et $36 = 6^2$ en sont, mais pas 17 ni 18.
Soit n un entier au moins égal à 2.
a. On suppose dans cette question que n est un nombre équilibré ; on note b sa balance.
Montrer que $n^2 - n = 2bn + b^2 + b$ puis que $b = \frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2}$.
En déduire que $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

b. On suppose dans cette question que $8n^2+1$ est un carré parfait ; on note e l'entier $\sqrt{8n^2+1}$.
Montrer que e est impair puis que le réel b défini par $b=\frac{-(2n+1)+e}{2}$ est un entier strictement positif.

c. Conclure que n est un nombre équilibré si et seulement si $8n^2+1$ est un carré parfait.

3. *Une fonction génératrice***.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=3x+\sqrt{8x^2+1}$$

a. Vérifier que pour tout réel x, on a : $8(f(x))^2+1=(8x+3\sqrt{8x^2+1}\,)^2$
b. En déduire que si n est un nombre équilibré, alors $f(n)$ l'est aussi.

On pose $u_1=6$ et, pour tout entier $k\geq 1$, $u_{k+1}=f(u_k)$.

c. Montrer que $(u_k)_{k\geq 1}$ est une suite strictement croissante de nombres équilibrés.
d. Montrer que pour tout entier $k\geq 2$, $u_{k-1}=3u_k-\sqrt{8{u_k}^2+1}$.

On considère les fonctions g et h définies sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x)=3x-\sqrt{8x^2+1}\ \text{ et }\ h(x)=3\sqrt{x}-\sqrt{8x+1}$$

e. Montrer que la fonction h est strictement croissante et en déduire que g l'est aussi.

On souhaite montrer que tout nombre équilibré est de la forme u_k pour un certain entier $k\geq 1$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe au moins un nombre équilibré qui n'est pas de cette forme. On note alors n le plus petit d'entre eux.

f. Calculer u_2. En admettant que les seuls nombres équilibrés strictement inférieurs à 36 sont 6 et 35 (ce qu'il serait toujours possible de tester « à la main »), en déduire que $n>u_2$ puis qu'il existe un entier $m\geq 2$ tel que $u_m<n<u_{m+1}$. Conclure.

4. *Tester en langage Python si un nombre est équilibré ou non*
a. Établir que, pour tout entier $k\geq 2$, on a : $u_{k+1}=6u_k-u_{k-1}$
b. On considère la fonction `mystere(n)` suivante, qui prend pour argument un entier n au moins égal à 2.

```
def mystere(n):
    s=1
    i=2
    while i<n:
        s=s+i
        i=i+1
    return s
```

Expliquer ce que calcule `mystere(n)`.

c. Écrire une fonction `equilibre(n)` prenant en argument un entier n au moins égal à 2 et renvoyant `True` s'il s'agit d'un nombre équilibré et `False` sinon (on pourra utiliser au choix la question **4.a** ou la question **4.b**. en expliquant toutefois quelle méthode est vraisemblablement la plus rapide pour l'ordinateur).

5. *Générer en langage Python des nombres équilibrés***.** Écrire une fonction `liste_equilibres(n)` prenant en argument un entier n au moins égal à 2 et renvoyant la liste des entiers équilibrés strictement inférieurs à n. On rappelle que `[]` est la liste vide et que, étant donnés une liste `L` et un entier `i`, la commande `L.append(i)` ajoute l'élément `i` à la liste `L` en le plaçant à la fin.