



L'Académie norvégienne a attribué le prix Abel 2017 au mathématicien Yves Meyer, de l'ENS Paris Saclay. Sa théorie des ondelettes est à la base de la compression d'image.



Lycée Jean-Baptiste Corot

Stage proposé aux élèves de seconde talentueux et motivés, désignés par leurs établissements, les 3 et 4 avril 2017

« Tout doit s'organiser autour de ce dévoilement, de ce mystère résolu. Il faudrait absolument que la pédagogie soit centrée sur cet objectif : faire naître chez les enfants, les adolescents, et finalement chez tout le monde, le sentiment que ce qui est extraordinaire en mathématiques, c'est que, de façon parfois surprenante et imprévue, on résout des énigmes dont l'énoncé est tout à fait clair et précis, mais qui cependant sont de vraies énigmes. »

Alain Badiou, Éloge des mathématiques, Flammarion 2015

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, INRIA siège à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, le collège Jean-Philippe Rameau et le lycée La Bruyère à Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut des hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera le 13 mai des lycéennes et lycéens particulièrement talentueux.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Un répondant minimum est attendu des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Thierry ICHELMANN, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET

Les responsables des établissements d'accueil : Didier GUILLEMOT (Président de l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines), Florence GOEHRS (Responsable administrative de l'UVSQ, campus des sciences), Jean-Paul JOUAN (Proviseur du lycée Camille Pissarro), Éric BISET (Proviseur du lycée Jean-Baptiste Corot)

Les professeurs : Bruno BAUDIN, lycée Camille Pissarro, PONTOISE, Jérôme CERISIER, lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE, Hélène COCHARD, lycée Blaise Pascal, ORSAY, Dominique CLENET, lycée François Villon, LES MUREAUX, Christophe DEGUIL, lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE, CERGY, Annie DJENDEREDJIAN, lycée Paul Langevin, SURESNES, Nicolas FIXOT, lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE, Catherine HOUARD, lycée Camille Pissarro, PONTOISE, Sylvie MANDART, lycée Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC, Sébastien MOULIN, lycée Jules Ferry, VERSAILLES, Laure PEROT, lycée Evariste Galois, SARTROUVILLE, Étienne PEYROUX, lycée Jean-Baptiste Corot, SAVIGNY SUR ORGE, Konrad RENARD, lycée René Cassin, GONESSE

Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves : Olivier MONTY (lycée Blanche de Castille, LE CHESNAY) Radonandrasana RABDRAMBOARISON (lycée Notre Dame Les Oiseaux, VERNEUIL SUR SEINE), Pascale SIMON (lycée Les Pierres Vives, CARRIERES SUR SEINE)

Emploi du temps

Lundi 3 avril 2017

	Pontoise 1	Pontoise 2	Savigny	Versailles 1	Versailles 2	Versailles 3
10	Film : les mathématiques et la mode		Exposé : le théorème de Sylvester	Film : les mathématiques et la mode		
10.45	Statistique, dénombrement BB	Aires et volumes CH	Équations HC	Statistique, dénombrement LP CD	Aires et volumes DC	Équations AD
12.30	Repas			Repas		
13.15	Nombres KR	Statistique, dénombrement BB	Fonctions EP	Équations AD	Statistique, dénombrement LP CD	Aires et volumes DC
15	Aires et volumes CH	Nombres KR	Aires et volumes HC	Exposé : le théorème de Sylvester		
				Aires et volumes DC	Équations AD	Statistique, dénombrement LP CD

Horaires pour Versailles : Première séance de 10.45 à 12.05, Repas de 12.10 à 12.45, deuxième séance de 12.50 à 14.15, Exposé de 14.20 à 15, troisième séance de 15.05 à 16.30

Mardi 4 avril 2017

	Pontoise 1	Pontoise 2	Savigny	Versailles 1	Versailles 2	Versailles 3
10	Exposé : le théorème de Sylvester		Film : les mathématiques et la mode	Angles et distances SéM	Nombres JC	Fonctions SyM CD
10.45	Équations CH	Fonctions BB	Nombres NF	Repas		
12.30	Repas			Fonctions SyM CD	Angles et distances SéM	Nombres JC
13.15	Fonctions BB	Angles et distances KR	Statistiques, Dénombrement CW			
15	Angles et distances KR	Équations CH	Angles et distances NF	Nombres JC	Fonctions SyM CD	Angles et distances SéM

Horaires pour Versailles : première séance de 10 à 11.40, repas de 11.45 à 12.35, deuxième séance de 12.40 à 14.30, troisième séance de 14.35 à 16.30

Thème statistiques, dénombrement et stratégie

Exercice 1 Mise en examen



On utilise un grand hall pour faire passer un examen. Les tables sont disposées selon m lignes et n colonnes. Il n'y a pas d'absent. Les étudiants gardent les dehors de la courtoisie, malgré leurs appréhensions : chacun serre la main de ses voisins (on peut avoir un voisin devant, un derrière, un à droite, un à gauche, et jusqu'à 4 en diagonale, soit un maximum de 8). 1020 poignées de mains sont échangées. Combien le hall contient-il de candidats ?

Les étudiants de la première ligne n'ont pas de voisin devant, ceux de la dernière ligne pas de voisin derrière, ceux de la colonne de gauche pas de voisin de gauche, ceux de la rangée de droite pas de voisin de droite.

3	5				5	3
5						5
5						5
3	5				5	3

Il y a donc 4 étudiants qui ont 3 voisins, $2(n-2) + 2(m-2)$ qui ont 5 voisins et $(m-2)(n-2)$ qui en ont 8.

Le nombre total de voisins est : $8(m-2)(n-2) + 10(m+n-4) + 3 \times 4$, soit $8mn - 6m - 6n + 4$. Ce nombre est le double du nombre de poignées de mains échangées (chacun est compté voisin d'un voisin). On a donc :

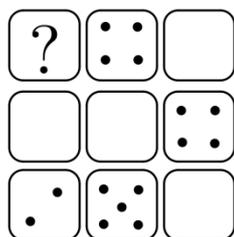
$$4mn - 3m - 3n + 2 = 1020$$

Une habile factorisation forcée conduit à :

$$(4m-3)(4n-3) = 4081$$

Il s'agit à présent de trouver deux entiers dont le produit est 4081. La décomposition en produit de facteurs premiers de ce nombre est $4081 = 7 \times 11 \times 53$. L'identification la plus adaptée au problème (c'est la seule, car ni 7 ni 11 n'ont comme reste 1 dans la division euclidienne par 4) est : $4m-3 = 77$ et $4n-3 = 53$; elle conduit à $m = 20$ et $n = 14$. Il y a 280 candidats.

Exercice 2 Dés collés



Sur un dé à jouer, le total des points marqués sur deux faces opposées est 7.

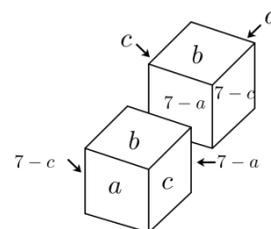
On a disposé neuf dés comme sur la figure ci-contre. Si deux faces sont en contact, elles portent le même nombre de points.

Le nombre de points figurant sur les faces laissées blanches sur la figure n'est pas une donnée du problème. On demande quel nombre de points représente le point d'interrogation.

Comme le montre la figure de droite, lorsque deux dés sont accolés par leurs faces identiques (face $7-a$ sur cette figure), les faces « complémentaires » (ici les faces a) sont opposées. Pour les faces latérales, si deux sont de même valeur, les autres sont de même valeur ou complémentaires (sur la figure de droite, les deux faces « b » sont opposées à deux faces « $7-b$ » et autres sont des faces « c » et « $7-c$ ». Les autres possibilités sont les assemblages « b et c , $7-b$ et $7-c$ » réalisés deux fois.

Dans le cas qui nous occupe, les dés qui font apparaître les faces 2 et 5 (en bas à gauche)

portent donc des valeurs identiques sur leurs faces latérales. Il en est de même des deux de la ligne du dessus qui leur sont accolés et cela s'étend à la ligne supérieure. Les faces « ? » et 4 sont donc complémentaires. $? = 3$.



Exercice 3 Bachotage

Un devoir est noté sur 40. La moyenne obtenue sur l'ensemble des copies est 16. La note 40 a été attribuée cinq fois. Combien de copies le professeur a-t-il corrigées, au minimum ?

Appelons N le nombre de copies et S la somme des notes obtenues. On peut écrire : $S = 16N$. Comme 5 copies ont reçu la note 40, on peut écrire $16N = 200 + (N-1)m$, où m est la moyenne des notes différentes de 40.

Et donc $N(16-m) = 200 - m$, puis $N = 12 + \frac{8+11m}{16-m}$. Le nombre minimum de copies est donc 13 (à ne pas

confondre avec les tâches habituelles des professeurs : on pourrait ajouter n'importe quel nombre de copies notées 16 sans modifier la donnée).

Exercice 4 Tournoi

Lors d'un tournoi sportif opposant n équipes, chaque équipe dispute un match contre chacune des autres. Il n'y a pas de match nul. L'équipe victorieuse est créditée d'un point, l'équipe défaite ne marque aucun point. Pour établir le classement final, on compte les points.

Une seule équipe occupe la dernière place (elle est la seule à totaliser un nombre de points inférieur à celui des autres). On constate que toutes les autres équipes ont perdu exactement une fois contre une équipe ayant un total strictement inférieur.

1. Se peut-il qu'il y ait eu six équipes engagées dans le tournoi ?
2. Se peut-il qu'il y en ait eu sept ?

Gagne contre	A	B	C	D	E	F	G	Score
A		x	x		x	x		4
B				x	x	x	x	4
C	x	x		x			x	4
D	x				x	x		3
E		x				x	x	3
F			x				x	2
G				x				1

1. Pour un tournoi opposant 6 équipes, 15 matchs ont eu lieu et 15 points ont été distribués. Supposons que F soit la dernière équipe classée. Si F termine avec un total de 2 points, alors le total des points distribués est au moins $2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 17$. Donc F a moins de 2 points. Chacune des équipes qui la précèdent a perdu exactement un match contre une équipe moins bien classée, nécessairement l'une d'elles a perdu contre F, et une seulement. Donc F a 1 point.

L'équipe classée avant-dernière, appelons-la E, a perdu contre F, seule équipe moins bien classée. Elle est seule à cette avant-dernière place, sinon F aurait 2 points. E a 2 points et pas 3, car $1 + 5 \times 3 = 16$. De ce fait, les équipes mieux classées que F et E ont chacune 3 points ($15 - 3 = 12 = 4 \times 3$). Mais alors, il faudrait qu'elles eussent perdu contre E ou F, qui de ce fait totaliseraient au moins 4 points à elles deux. Impossible.

2. Voici un tableau représentant un déroulement possible d'un tel tournoi

Exercice 5 Jeu de stratégie (Olympiades 2017)

Asmaa et Benjamin jouent à un jeu dont voici les règles :

Un nombre entier N supérieur ou égal à 3 est donné.

Chacun annonce à son tour un nombre entier compris entre 1 et N , 1 et N compris.

- Règle 1 : Un joueur ne peut pas réutiliser un nombre entier qui a déjà été annoncé par lui-même ou par son adversaire ;
- Règle 2 : Un joueur ne peut pas annoncer un nombre entier inférieur ou supérieur de 1 à un nombre qu'il a déjà annoncé lui-même lors de cette partie.

La partie s'arrête lorsque :

- Tous les nombres entiers compris entre 1 et N ont été annoncés et la partie est alors déclarée nulle ;
- Il reste des nombres entiers non annoncés mais le joueur qui a la main ne peut pas les annoncer à cause de la seconde règle. Ce joueur a alors perdu la partie.

C'est toujours Asmaa qui commence à jouer. On pourra noter A pour Asmaa et B pour Benjamin.

Par exemple : $N = 6$:

Un exemple de partie nulle :

A annonce 3 ;

B annonce 2 ;

A annonce 5 ;

B annonce 4 ;

A annonce 1 ;

B annonce 6 ; Égalité.

Un exemple de partie où A perd :

A annonce 3 ;

B annonce 1 ;

A annonce 6 ;

B annonce 5 ;

A ne peut annoncer ni 2, ni 4; A a perdu.

On étudie dans la suite quelques situations. On prendra garde au fait que, par exemple, « ne pas perdre » signifie gagner ou faire partie nulle. On rappelle que c'est toujours Asmaa qui commence.

1. Pour $N = 3$, donner un exemple de stratégie gagnante pour Benjamin (c'est-à-dire telle que Benjamin gagne quoi que joue Asmaa).

2. On s'intéresse au cas où $N = 4$.

a. Proposer un exemple de partie que Benjamin gagne.

b. Étude du jeu

(i) Asmaa dit : « Je joue 1 et, je ne peux pas perdre ». Pourquoi ?

(ii) Asmaa commence par 2, alors Benjamin dit : « Je vais gagner ! ». Quelle est la stratégie de Benjamin ?

(iii) Asmaa peut-elle, en jouant bien, être sûre de gagner ?

3. Donner un exemple de partie nulle pour un entier N quelconque supérieur ou égal à 3.

4. On s'intéresse au cas où $N = 5$.

a. Asmaa commence par annoncer 5. Montrer qu'en jouant 1, Benjamin gagne à coup sûr.

b. En déduire que, pour $N = 5$, quel que soit le nombre choisi par Asmaa au premier coup, il existe un nombre que Benjamin peut choisir au deuxième coup pour être certain de gagner.

5. On s'intéresse au cas où $N = 7$, le jeu commence par $A : 1$ puis $B : 7$. Donner une stratégie gagnante pour Benjamin.

6. On suppose que N est impair, et on pose $N = 2p - 1$. Asmaa joue un entier m , différent de p . Benjamin joue $2p - m$. Il pense gagner en jouant systématiquement par la suite le complément à $2p$ du dernier choix d'Asmaa.

A-t-il raison ?

1. $N = 3$. Si Asmaa joue 2, Benjamin gagne quoi qu'il fasse, car elle ne pourra plus jouer 1 ni 3. Si elle joue 1, il joue 3, si elle joue 3, il joue 1, car elle ne peut plus jouer 2.

2. $N = 4$.

a. Exemple : Asmaa joue 2, Benjamin joue 4, Asmaa ne peut plus jouer.

b. (i) Si Asmaa joue 1, quoi que joue Benjamin, elle pourra jouer une seconde fois et il y aura gain pour elle ou partie nulle.

(ii) Ce cas a été traité en exemple

(iii) Les rôles de 1 et 4, comme ceux de 2 et 3, sont symétriques. Asmaa joue par exemple 1, mais si Benjamin joue 4 elle devra jouer 3 et Benjamin pourra jouer 2. Partie nulle.

3. Asmaa joue 1, Benjamin joue 2, Asmaa joue 3, Benjamin joue 4, etc. *ad libitum*. Tous les nombres possibles ont été utilisés. Nullité par épuisement.

4. $N = 5$.

a. 5 et 1 sont pris. 4 est interdit. Si Asmaa joue 3, elle s'interdit 2 et ne pourra pas jouer le cinquième coup. Mais si elle joue 2, elle ne pourra plus jouer non plus. Benjamin a toute latitude pour jouer 4 et gagner.

b. Si Asmaa joue 2, Benjamin joue 4 : 1 et 3 sont interdits, 5 est le seul choix pour Asmaa. Benjamin joue 1. Asmaa perd. Situation symétrique si Asmaa joue 4. Si, enfin, Asmaa joue 3, Benjamin joue 1 (ou 5) ; Asmaa qui ne peut jouer 2 ni 4 joue 5 (ou 1) mais ne pourra plus jouer au cinquième tour.

5. $N = 7$.

Une fois que les extrémités ont été éliminées, les joueurs se retrouvent dans la situation $N = 5$.

6. $N = 2p - 1$.

Si la partie peut durer, permettant aux joueurs de jouer tous les couples $(m, 2p - m)$, aucun des deux joueurs n'aura joué deux nombres consécutifs. Mais alors, l'un a donné les nombres pairs inférieurs à p et l'autre les impairs, et la réciproque s'est produite pour les nombres supérieurs à p (en effet, la somme de deux jeux consécutifs de A puis B est paire, donc somme de deux pairs ou deux impairs). L'un des deux a joué $p - 1$ et l'autre $p + 1$. Pour le dernier coup, Asmaa ne peut pas jouer p , car elle a joué un de ses voisins...

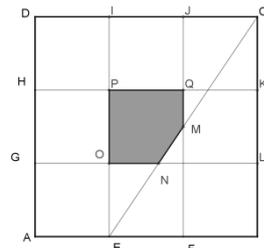
Thème aires et volumes

Exercice 1 Encore un carreau...

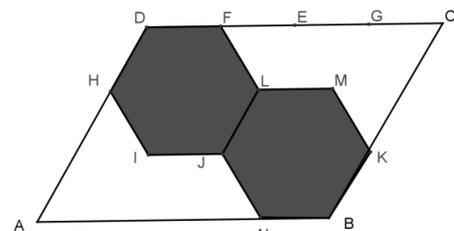
Le carré ABCD a pour côté 3 et il est découpé régulièrement en 9 carrés de côté 1. La droite (CE) détermine les points M et N sur (JF) et (GL).

Quelle est l'aire du pentagone MNO PQ ?

Le point M est le milieu de [EC] et le point N est au tiers de [ME], ce qui fait que le triangle rectangle d'hypoténuse [MN] a une aire égale au neuvième de celle de MEF. L'aire de MEF est $\frac{3}{4}$; finalement l'aire du pentagone est égale à l'aire d'un carré de côté 1 à laquelle il faut ôter $\frac{1}{12}$. Elle est donc égale à $\frac{11}{12}$.



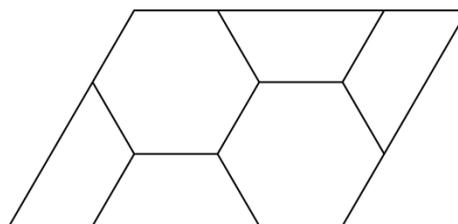
Exercice 2 Deux hexagones



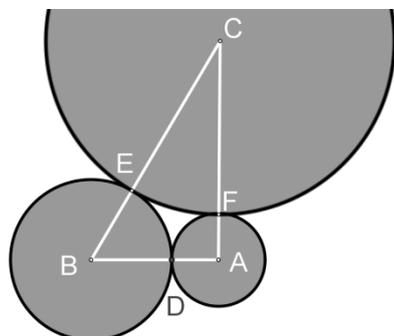
Les deux hexagones réguliers identiques sont placés côte à côte dans le parallélogramme ABCD.

Quelle fraction de l'aire du parallélogramme représente l'aire de chacun des hexagones ?

La question non posée consiste à savoir comment on peut construire une telle figure : le parallélogramme a nécessairement des angles de 120° et 60° , le point N est nécessairement au quart de [BA] à partir de B, et le point K au tiers de [BC] (ce qui fournit le point C, qui ne peut être une donnée du problème, si on commence la construction par [AB]). Cela fait, on peut tracer les segments [MG] et son symétrique par rapport au centre du parallélogramme, ce qui nous fournit une image plus parlante, sur laquelle apparaissent les deux hexagones et quatre « moitiés d'hexagones ».



Exercice 3 Interstice



Le triangle ABC, rectangle en A, possède un angle en B de mesure 60° et un angle en C de mesure 30° (heureusement !). Le côté [AB] a pour longueur 6.

Trois cercles, de centres respectifs A, B et C, coupent les côtés du triangle en D, E et F, points en lesquels il sont (par deux) tangents.

Quelle est l'aire de la partie du plan (laissée en blanc) située entre les trois disques gris ?

Appelons a, b, c les rayons des cercles de centres A, B et C (dans le même ordre). La somme $a + b + c$ est le demi-périmètre du triangle ABC, tandis que, par exemple $a + b = 6$. Comme le triangle ABC est « un demi triangle équilatéral », on a $BC = 12$ et $AC = 6\sqrt{3}$. Il vient : $c = 3 + 3\sqrt{3}$, puis $a = 3\sqrt{3} - 3$ et $b = 9 - 3\sqrt{3}$.

L'aire cherchée est la différence entre l'aire du triangle ABC (qui est $18\sqrt{3}$) et la somme des aires des secteurs circulaires CEF, BDE et ADF. L'aire du secteur CEF est le douzième de l'aire du disque de rayon $3 + 3\sqrt{3}$. L'aire de BDE est le sixième de l'aire du disque de rayon $9 - 3\sqrt{3}$ et l'aire de ADF est le quart de l'aire du disque de rayon $3\sqrt{3} - 3$. On trouve pour cette aire $18\sqrt{3} - (30 - 12\sqrt{3})\pi$.

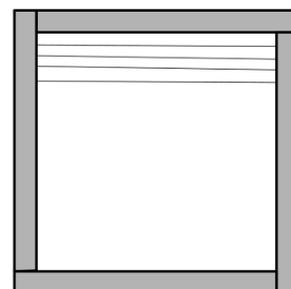
Exercice 4 Parqueterie

On souhaite découper un carré de côté 1 en rectangles de même périmètre (qui ne sont pas nécessairement de la même forme). Peut-on réaliser ce découpage avec :

- 20 rectangles de périmètre 2,5 ?
- 30 rectangles de périmètre 2 ?

1. Considérons un rectangle de dimensions a et b , où $a \leq b$.

Les conditions imposées conduisent à $2a + 2b = 2,5$ et $b \leq 1$. Donc $2,5 \leq 2a + 2$ donc $a \geq 0,25$. L'aire de chacun des rectangles est minorée par a^2 . Or $20a^2 \geq 1,35$. Par conséquent, le découpage proposé est impossible.

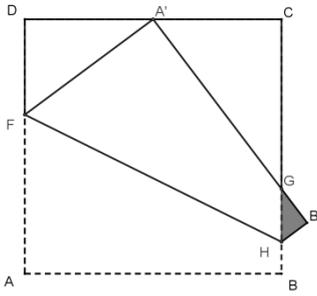


et

2. On place 4 rectangles de dimensions x et $1 - x$ sur le bord du carré. Leur périmètre est 2. À l'intérieur du carré, on place 26 lames de même largeur $\frac{1-2x}{26}$.

Leur périmètre est $2(1 - 2x) + \frac{1-2x}{13}$. Ce périmètre est égal à 2 si et seulement si $x = \frac{1}{54}$

Exercice 5 Origami pour débutants



La feuille carrée ABCD a été pliée selon la droite (FH) et le point A est arrivé en A', milieu du côté [BC]. Le côté du carré est 8 cm. Quelle est l'aire du triangle B'HG ?

Observons le triangle FDA', rectangle en D. Si on pose $DF = x$, il vient $A'F = 8 - x$ et $(8 - x)^2 = x^2 + 16$, qui se résume à $x = 3$.

Les triangles DFA' et CA'G ont les mêmes angles. Il s'ensuit que $\frac{CA'}{DF} = \frac{CG}{DA'} = \frac{GA'}{FA'}$

Par conséquent $CG = \frac{16}{3}$ et $A'G = \frac{20}{3}$

Comme $A'B' = 8$, il vient $GB' = \frac{4}{3}$

Les triangles A'CG et HB'G ont eux aussi les mêmes angles, d'où on tire $\frac{HB'}{A'C} = \frac{GB'}{CG}$, qui conduit à $HB' = 1$

Finalement, l'aire cherchée est $\frac{B'H \times B'G}{2}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$

Thème équations

Exercice 1 Somme de deux carrés

Les nombres réels x et y satisfont : $\frac{x+22}{y} + \frac{290}{xy} = \frac{26-y}{x}$. Quel est le produit xy ?

Après avoir vérifié que les couples $(0, y)$ et $(x, 0)$ ne peuvent faire partie des solutions, multiplions par xy . On obtient : $x^2 + 22x + 290 = 26y - y^2 \dots$

Ou encore $(x + 11)^2 + (y - 13)^2 = 0$

Qui ne peut avoir lieu que si $x = -11$ et $y = 13$

Donc $xy = -143$

Exercice 2 Pour votre santé, évitez les aliments gras, sucrés, salés

Ali, Bela, Caro, Dora et Éva possèdent à eux cinq 100 bonbons. Simultanément, chacun donne à un autre une partie de ce qu'il possède : Ali donne $\frac{1}{3}$ de ce qu'il a à Bela, Bela $\frac{1}{4}$ de ce qu'il a à Caro, Caro $\frac{1}{5}$ de ce qu'elle possède à Dora, Dora $\frac{1}{6}$ de son capital à Éva et Éva $\frac{1}{7}$ du sien à Ali. À l'issue de ces transferts, chacun a retrouvé son effectif initial. Quelles étaient-ils ?

Appelons a, b, c, d et e les parts initiales de chacun. Les transferts se traduisent par les égalités :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + \frac{1}{7}e = a \\ \frac{3}{4}b + \frac{1}{3}a = b \\ \frac{4}{5}c + \frac{1}{4}b = c \\ \frac{5}{6}d + \frac{1}{5}c = d \\ \frac{6}{7}e + \frac{1}{6}d = e \end{cases} \quad \text{On obtient successivement :}$$

$$\begin{cases} 7a = 3e \\ 3b = 4a \\ 4c = 5b \\ 5d = 6c \\ 6e = 7d \\ a + b + c + d + e = 100 \end{cases}$$

D'où on tire, par combinaison ou substitution :

Un raisonnement arithmétique est possible, les nombres en jeu étant des entiers : e est un multiple de 7, d un multiple de 6, etc., a est un multiple de 3 et leur somme est 100...

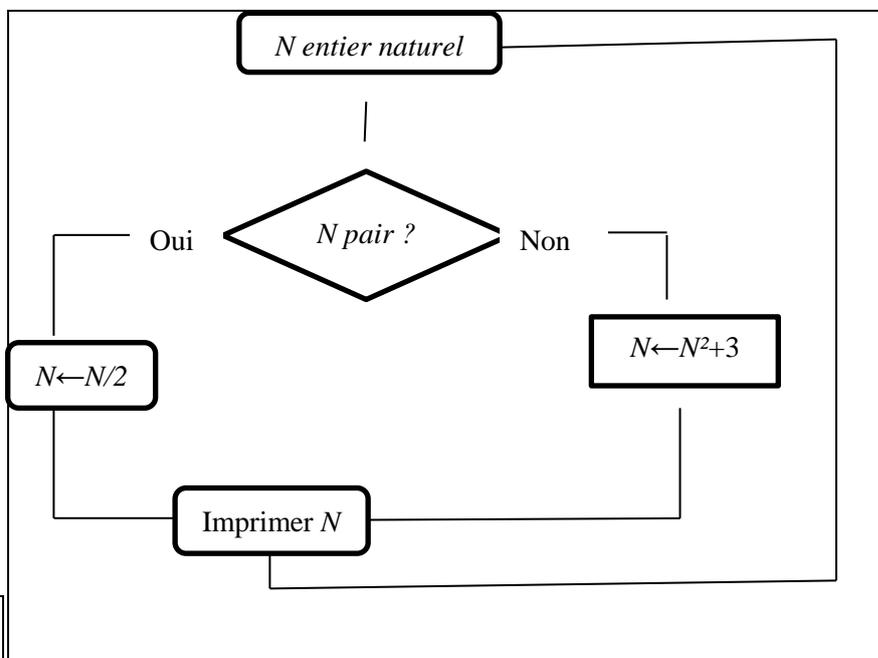
$$a = 12, b = 16, c = 20, d = 24, e = 28$$

Exercice 3 Les petits dixièmes

On fait subir à un entier l'algorithme décrit ci-contre.

Pour quels entiers inférieurs à 1 000 le dixième nombre imprimé est-il inférieur à 10 ?

Si le neuvième nombre affiché est impair et le dixième inférieur à 10, c'est que le dixième nombre affiché est 4 et le neuvième 1. Dans tous les autres cas, le neuvième nombre affiché est le double du dixième.



Dixième	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
neuvième	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Un seul de ces neuvièmes nombres potentiels est la somme du carré d'un impair et 3, c'est 12. 12 renvoie à 3 (il y a un cycle 6 – 12 – 3).

En dehors de ces cas, la ligne des « huitièmes » ne comporte que des multiples de 4. Examinons l'égalité $(2p + 1)^2 + 3 = 4q$. Elle conduit à $p^2 + p + 1 = q$, qui garantit que q est impair. Le seul nombre impair inférieur à 10 conduisant à une telle éventualité est 7, issu de 14, issu de 28 issu de 56 ou de 5 (mais on vient de voir que 5 ne convient pas). Le tableau des « premiers nombres inférieurs à 1 000 conduit aux possibilités : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 320, 512

Exercice 4 Trois inconnues

Trouver les triplets (x, y, z) de nombres réels vérifiant :

$$x + y - z = -1, x^2 - y^2 + z^2 = 1, -x^3 + y^3 + z^3 = -1$$

La première condition fournit : $x + y = z - 1$.

La deuxième peut être écrite : $(x - y)(z - 1) + (z - 1)(z + 1) = 0$

Ou encore $(z - 1)(x - y + z + 1) = 0$

1. On cherche des solutions vérifiant $z = 1$

Les conditions peuvent être réécrites $x + y = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ et $-x^3 + y^3 = -2$.

Nécessairement $x = -y = 1$, ce qui conduit à $(x, y, z) = (1, -1, 1)$. On vérifie qu'il s'agit bien d'une solution.

2. On cherche des solutions vérifiant $z \neq 1$

Nécessairement $x - y + z + 1 = 0$, et, comme $x + y - z = -1$, il s'ensuit que $2x = -2$, donc $x = -1$, puis que $y = z$, et comme $y^3 + z^3 = -2$, il vient $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$. Reste à vérifier qu'il s'agit bien d'une solution.

Exercice 5 Recoller les morceaux

1. À partir de deux nombres réels x et y strictement compris entre 0 et 1, on fabrique les nombres $a = x + 3y$ et $b = 3x + y$. Quels sont les couples (x, y) pour lesquels a et b sont des entiers ?

2. Pour quel entier m peut-on trouver exactement 119 couples (x, y) de réels tels que $x + my$ et $mx + y$ soient des entiers ?

1. Comme x et y sont compris entre 0 et 1, il s'ensuit que a et b sont compris strictement entre 0 et 4. Comme ce sont des entiers, $1 \leq a \leq 3$ et $1 \leq b \leq 3$. Par ailleurs, on peut résoudre en (x, y) le système $\begin{cases} x + 3y = a \\ 3x + y = b \end{cases}$, ce qui conduit à $8x = 3b - a$ et $8y = 3a - b$. On obtient 9 couples (x, y) , en donnant à a et b les valeurs entières 1, 2 ou 3. Mais le couple (a, b) ne peut prendre les valeurs $(1, 3)$ ou $(3, 1)$. Il y a 7 solutions :

$$\left(\frac{2}{8}, \frac{2}{8}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right), \left(\frac{4}{8}, \frac{4}{8}\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right), \left(\frac{6}{8}, \frac{6}{8}\right) \text{ (Expressions à simplifier)}$$

2. Le raisonnement est le même : Les nombres a et b sont des entiers compris entre 1 et m , et le système d'équations conduit à $(m^2 - 1)x = mb - a$ et $(m^2 - 1)y = ma - b$. On obtient donc m^2 couples, dont 2 doivent être éliminés. Finalement $m = 11$.

Thème fonctions

Exercice 1 Ronde de valeurs absolues

Trois nombres a, b et c vérifient : $|a - b| \geq |c|$, $|b - c| \geq |a|$ et $|c - a| \geq |b|$. Montrer que l'un des trois est la somme des deux autres.

NB L'expression « valeur absolue » et la notation « $|\cdot|$ » qui lui est associée désignent la fonction $x \mapsto \text{Max}\{x, -x\}$. La terminologie est ancienne et maladroite, mais il vaut mieux savoir faire avec.

Commençons par observer que toute permutation (transposition : échange de deux lettres ou permutation circulaire) des trois lettres a, b et c laisse inchangées les conditions posées.

On peut donc supposer que $a \geq b \geq c$ sans rien changer au problème. Avec cette écriture particulière, les conditions sont : $a - b \geq |c|$, $b - c \geq |a|$, $a - c \geq |b|$.

De $b - c \geq |a|$, on déduit $b - c \geq a$ et donc $c \leq 0$. Mais alors $|c| = -c$ et $a + c \geq b \geq c + |a| \geq c + a$

Et donc $b = a + c$

Exercice 2 Les randonneurs (Olympiades 2017)

Didon et son ami Énée participent à une randonnée. Le groupe a marché 4,5 heures et parcouru 28 km, arrêts déduits.

1. Quelle est la moyenne horaire réalisée pendant cette randonnée ?

Didon a observé que, pendant chaque heure de marche continue, le groupe a parcouru 6 km.

2. Comment est-ce possible ?

On pourra utiliser un graphique.

À l'issue de la randonnée, Énée et son amie Didon se retrouvent au bord d'une route empruntée par une ligne de bus. « On rentre en bus », dit Énée. Mais quel est l'arrêt le plus proche ? Les deux amis se séparent. Énée choisit l'arrêt situé en amont, et marche à la vitesse de 6 km/h. Didon marche vers l'arrêt aval, à la vitesse de 4 km/h. Le bus effectue le parcours à la vitesse moyenne de 60 km/h. Les deux amis arrivent chacun à son arrêt exactement en même temps que le bus.

3. Qui avait raison ?

1. La moyenne horaire est : $v = \frac{28}{4,5}$

Arrondie au mètre, cette vitesse moyenne est donc 6, 222 km/h.

2. On place dans un repère les points de coordonnées (4,5 ; 28), (3,5 ; 22), (2,5 ; 16), (1,5 ; 10), (0,5 ; 4) par lesquels passe nécessairement la courbe représentant la distance parcourue en fonction de la durée de parcours (on procède par retour arrière).

Cette courbe passe aussi par les points de coordonnées (0 ; 0), (1 ; 6), (2 ; 12), (3 ; 18), (4 ; 24).

La courbe réalisée en joignant les points successifs par des segments de droite répond au problème. On vérifie en effet que la translation de vecteur $\vec{u} = \left(1, \frac{28}{4,5}\right)$ transporte tout

point de la courbe d'abscisse inférieure à 3,5 en un autre point de la courbe.

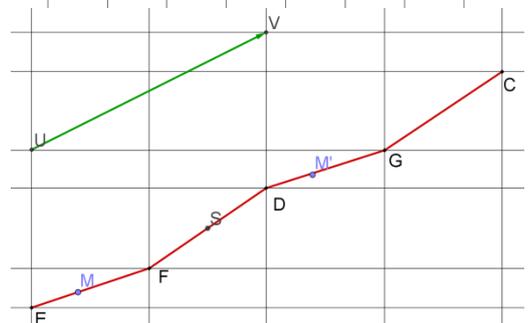
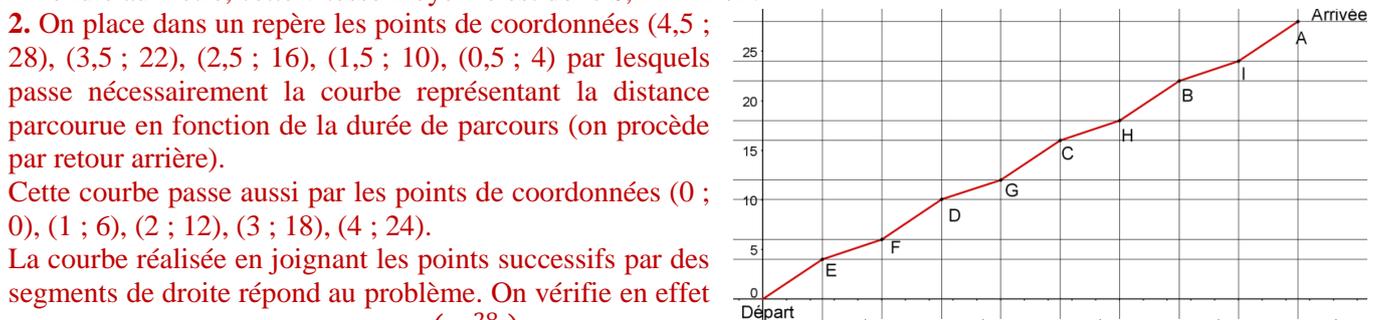
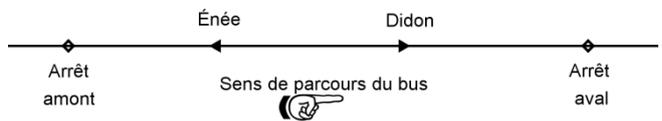
Cette courbe ne représente pas la seule solution du problème.

3. Appelons x la distance à parcourir pour Énée et y la distance à parcourir pour Didon. Écrivons que le temps qu'il faut à Didon pour atteindre l'arrêt aval est le même que celui qu'il faut à Énée pour atteindre l'arrêt amont, prendre le bus (ce qu'on suppose instantané) et arriver en bus jusqu'à l'arrêt aval :

$$\frac{y}{4} = \frac{x}{6} + \frac{x+y}{60}$$

Ce qui conduit à $14y = 11x$

La distance à parcourir pour Didon était la plus courte (ce qui n'a pas empêché Énée d'être le premier dans le bus).



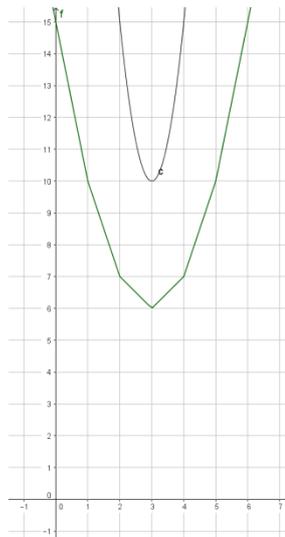
Exercice 3 Conflit au centre

Étant donné une série statistique (x_1, x_2, \dots, x_n) , on cherche la caractéristique de tendance centrale qui en serait la plus représentative. Deux propositions s'opposent pour ce « centre » :

1. On peut chercher les (on utilise le pluriel de politesse, en mathématiques) nombres m réalisant le minimum de la fonction : $x \mapsto \sum_{i=1}^n |x - x_i|$, fonction somme des écarts absolus.

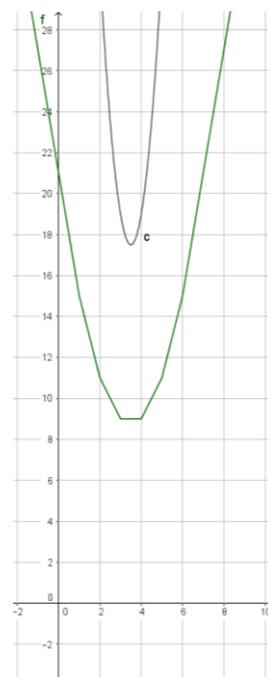
2. On peut chercher les nombres m réalisant le minimum de la fonction $g : x \mapsto \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$, fonction somme des carrés des écarts.

À l'aide des exemples des séries (1, 2, 3, 4, 5) et (1, 2, 3, 4, 5, 6), dire comment sont définies ces caractéristiques de tendance centrale par rapport à la médiane et la moyenne.



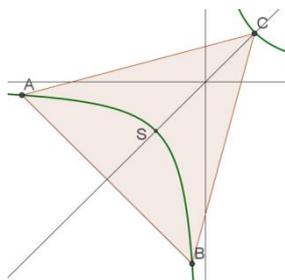
On rencontre avec la première définition une fonction affine par morceaux dont le minimum est atteint en la valeur centrale (qui sera appelée par la suite médiane de la distribution) ou, lorsque le nombre de valeurs dans la distribution est pair, en n'importe quel point de l'intervalle médian (d'où l'article indéfini pour *médiane*). Avec la seconde définition, on a une fonction du second degré (dont le minimum n'a pas de raison – sauf ici une raison de symétrie – de coïncider avec celui – ou un de ceux – de la fonction affine par morceaux.

Attention : les échelles ne sont pas les mêmes sur les deux graphiques.



Exercice 4 Hyperbole « équilatère »

Les sommets A, B et C d'un triangle équilatéral sont tous situés sur la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Le centre de gravité de ce triangle se situe en un « sommet » de cette courbe (c'est-à-dire en un de ses points d'intersection avec la droite d'équation $y = x$). Quelle est l'aire d'un tel triangle ?



On peut supposer que le centre de gravité est le point S de coordonnées $(-1, -1)$. Supposons que les points A, B et C ont pour coordonnées, respectivement, $(a, \frac{1}{a})$, $(b, \frac{1}{b})$, $(c, \frac{1}{c})$. Les coordonnées de S vérifient :

$$-3 = a + b + c \text{ et } -3 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

On doit également écrire que les points A et B sont équidistant de S, ce qui conduit à :

$$(a + 1)^2 + \left(\frac{1}{a} + 1\right)^2 = (b + 1)^2 + \left(\frac{1}{b} + 1\right)^2$$

$$\text{Cette dernière égalité peut être transformée en : } (a - b)(a + b + 2) = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + 2\right)$$

Ou encore, puisque $a - b \neq 0$: $a + b + 2 = \frac{a+b+2}{ab}$

Ou bien $a + b = -2$. Donc $c = -1$. Mais alors le point C est en S (et les trois points A, B et C ne sont pas distincts).

Ou bien $a + b \neq -2$ et $ab = 1$. Les points A et B sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Cette droite, qui est la médiatrice de [AB], passe par S et par C.

La distance SC est égale à $2\sqrt{2}$. Elle est égale aux deux-tiers de la hauteur du triangle ABC, qui est donc égale à $3\sqrt{2}$. Le côté de ce triangle est donc $2\sqrt{6}$. Et son aire est $6\sqrt{3}$.

Exercice 5 Ne développez pas !

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 12x + 30$.

Quelle est la plus grande solution de l'équation $f(f(f(x))) = 0$?

$$\text{Écrivons } f(x) = (x + 6)^2 - 6$$

$$\text{On a successivement, pour tout } x : f(f(x)) = (f(x) + 6)^2 - 6 = ((x + 6)^2 - 6 + 6)^2 - 6 = (x + 6)^4 - 6,$$

$$\text{et } f(f(f(x))) = ((x + 6)^4 - 6 + 6)^4 - 6 = (x + 6)^{16} - 6$$

Appelons α le réel positif dont la puissance seizième est 6. L'équation $(x + 6)^{16} - \alpha^{16} = 0$ a les mêmes racines que $(x + 6)^8 - \alpha^8 = 0$, puis que $(x + 6)^4 - \alpha^4 = 0$, puis que $(x + 6)^2 - \alpha^2 = 0$,

puis que $x + 6 - \alpha = 0$ ou $x + 6 + \alpha = 0$. C'est la première de ces deux égalités qui donne la solution la plus grande, $\alpha - 6$.

Thème angles et distances

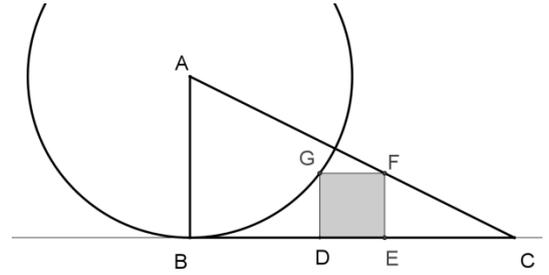
Exercice 1 La pierre sous la roue

Sur la tangente en B au cercle de centre A et de rayon 1, on place le point C tel que $BC = 2$. Les points D et E appartiennent au segment [BC]. Un des autres sommets du carré construit sur [DE] appartient au segment [AC], l'autre au cercle. Quelle est la longueur DE ?

Les triangles CEF et CBA sont semblables (en situation de Thalès) et donc, si on appelle x le côté du carré, $CE = 2x$. Il s'ensuit que $BD + 3x = 2$ ou $BD = 2 - 3x$. La droite (FG) coupant (AB) en H, le triangle AGH est rectangle en H et $1 = (1 - x)^2 + BD^2$.

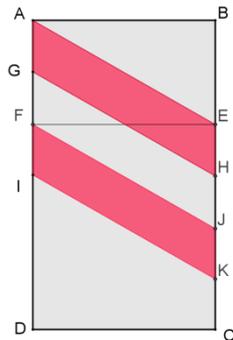
D'où l'équation $2x - x^2 = (2 - 3x)^2$, qui s'écrit encore $10x^2 - 14x + 4 = 0$.

Comme $5x^2 - 7x + 2 = (5x - 2)(x - 1)$, on en déduit que $x = \frac{2}{5}$.



Exercice 2 Majorette

Autour d'un bâton cylindrique de rayon 2 cm, on enroule un ruban de tissu coloré. Ce ruban fait un angle de 30° avec l'axe du bâton. On ne laisse aucun pli. Le ruban forme une hélice de tissu et laisse vide une hélice (on voit la surface du bâton) de même largeur. Quelle est la largeur du ruban ?



On assimile le bâton à un cylindre de papier de même rayon. Coupé selon une génératrice, le cylindre de papier est un rectangle, sur lequel le ruban prend l'aspect d'une suite de parallélogrammes. Les points A et B sont un même point de la surface du bâton, comme E et F, H et I.

Dire que les deux rubans (le vrai et son complémentaire, absent) ont la même largeur, c'est dire que G est le milieu de [AF]. Or, $AF = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. Donc $AG = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ et la largeur du ruban est $\ell = AG \frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalement $\ell = \pi$.

Exercice 3 Les soixantièmes stridents

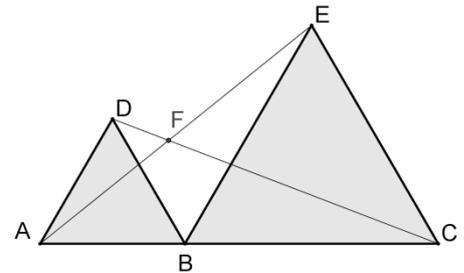
Les deux triangles équilatéraux ABD et BCE sont l'un et l'autre situés dans le même demi-plan de frontière (AC). Le point B appartient au segment [AC].

Les segments [AE] et [CD] ont pour point d'intersection F.

Montrer que $\widehat{AFD} = 60^\circ$

Les angles \widehat{DBC} et \widehat{ABE} ont même mesure (120°) dont les côtés ont même longueur. Ils sont donc isométriques. Il s'ensuit que $\widehat{EAB} = \widehat{CDB}$. L'étude des angles du triangle ADF conduit à :

$\widehat{AFD} = 180^\circ - (60^\circ + \widehat{CDB}) - (60^\circ - \widehat{EAB})$, et donc au résultat demandé.



Exercice 4 Saute, saute, sauterelle... (Olympiades 2017)

Quatre sauterelles sont placées sur un plan. À chaque seconde, une (et une seule) quelconque d'entre elles saute au-dessus d'une autre selon la règle suivante : si la sauterelle placée en A saute au-dessus de la sauterelle placée en B, elle atterrit au point A' , symétrique de A par rapport à B.

On représente la situation en utilisant un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Au départ, les quatre sauterelles occupent les sommets – tous à coordonnées entières – d'un carré de côté 1.

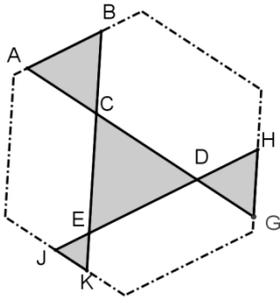
1. Pour chacun des cas suivants, indiquer un exemple de configuration initiale possible en y associant une liste de sauts possibles (l'ordre alphabétique des lettres M, N, P, Q ne préjuge pas de leur disposition initiale).

<i>a. il y a eu deux sauts</i>	<i>b. il y a eu quatre sauts</i>	<i>c. il y a eu quatre sauts</i>	<i>d. il y a eu quatre sauts</i>

2. *a.* Est-il possible que les quatre sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, toutes sur le même point ?
- b.* Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les quatre sauterelles se trouvent sur quatre points alignés ?
- c.* Est-il possible que trois sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, sur le même point ?
3. *a.* Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les sauterelles forment à nouveau un carré ? Donner un exemple.
- b.* Montrer qu'un tel carré a nécessairement pour côté 1.
4. On suppose que les positions de départ sont les points dont les couples de coordonnées sont (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). On dira qu'une sauterelle est *de type PP* si ses deux coordonnées sont des entiers pairs, *de type PI* si son abscisse est paire et son ordonnée impaire, *de type IP* si son abscisse est impaire et son ordonnée paire, et *de type II* si ses deux coordonnées sont impaires.
- a.* Prouver qu'à tout instant les sauterelles se trouvent sur des points à coordonnées entières, et que chacune a conservé son *type* initial.
- b.* Est-il possible que trois des sauterelles soient à une même distance de la quatrième ?
- c.* Prouver que l'on n'aura jamais trois sauterelles alignées.

1. *a.* P et Q ont sauté par-dessus N.
 - b.* P et Q ont sauté par-dessus N et M a sauté deux fois par-dessus N (N n'a pas bougé).
 - c.* Si Q saute par-dessus P et P par-dessus N on se retrouve, au nom des points près, dans la situation du *a.*
 - d.* Si M saute par-dessus N et Q par-dessus le nouvel M, on se retrouve à une symétrie près dans la situation du *a.*
- Cette phase expérimentale permet de comprendre que les situations rencontrées dans ce jeu sont **réversibles**.
2. *a.* Si les sauterelles sont toutes sur le même point, par-dessus quelle autre sauterelle aurait pu sauter la dernière arrivée ?
 - b.* La réversibilité évoquée à la question précédente montre que si les quatre sauterelles sont alignées, c'est qu'elles l'ont toujours été...
 - c.* Trois sauterelles sur le même point : pour débloquer la situation, il faut imaginer qu'une des trois a sauté par-dessus la quatrième. On est donc parti de trois sauterelles alignées, plus une qui « double » sur un point. Pour débloquer la situation, il faut imaginer que c'est cette dernière qui vient de sauter, mais alors c'est dire que les quatre étaient alignées...
 3. *a.* Dans la situation du 1. *a.* , deux des sauterelles avaient sauté par-dessus une troisième : que la quatrième en fasse autant, et on aura le symétrique du carré par rapport à un de ses sommets.
 - b.* Les sauterelles occupant des points à coordonnées entières, il est impossible que le carré qu'elles occuperaient après divers sauts ait un côté de longueur inférieure à 1. Si elles occupaient un carré de côté plus grand, en prenant comme « maille » ce nouveau carré, et par réversibilité, le carré de départ aurait un côté de longueur inférieure à celle de la nouvelle maille. C'est impossible.
 4. *a.* Lorsqu'une sauterelle saute par-dessus une autre, son abscisse augmente ou diminue de deux fois la différence des abscisses, et son ordonnée augmente ou diminue de deux fois la différence des ordonnées. Ses coordonnées, entières, ne subissent aucun changement de parité. Le *type* est conservé.
 - b.* Prenons comme origine le point où se trouve la sauterelle « centre ». À une redistribution des rôles près, les couples de coordonnées des trois autres sauterelles, $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$ sont de types II, IP et PI et on a l'égalité des distances $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$.
Si ces trois sommes de carrés sont impaires, alors chacune des sommes contient un terme pair et un terme impair. Deux d'entre elles sont donc constituées de la même façon, révélant deux couples du même type.
Si ces trois sommes de carrés sont paires, alors ou bien l'une au moins est somme de carrés pairs (issue d'un couple de type PP, comme le « centre »), ou elles sont toutes sommes de carrés impairs, ce qui est aussi interdit.
 - c.* Si trois sauterelles sont alignées, prenons-en une comme origine. Les couples de coordonnées $(x, y), (x', y')$ des deux autres vérifient $xy' - yx' = 0$. Si x est pair, alors ou bien y est pair, mais cela fait un couple de type PP, comme l'origine, ou bien x' est pair, mais alors, cela ferait trois abscisses paires c'est une de trop.

Exercice 5 Sous le signe de l'hexagone



Un hexagone régulier a été découpé en sept morceaux, dont quatre sont des triangles équilatéraux : ABC, CDE, DGH et EJK.

On donne $AB = 11$, $CD = 16$, $DG = 9$, $EK = 5$.

Quelle est la longueur du côté de l'hexagone de départ ?

La diagonale [ST] est parallèle à (BK) car elle fait un angle de 60° avec (AB). Le quadrilatère BEUS est un parallélogramme. On a donc $SU = 16 + 11 = 27$

Le triangle UJT est équilatéral, donc $JU = UT$.

Par ailleurs $JU + UD + DH = JE + ED + DH = 5 + 16 + 9 = 30$.

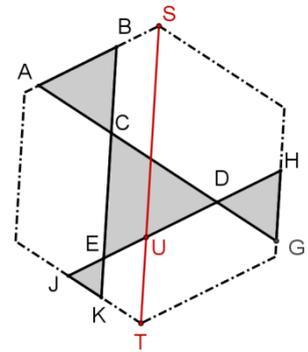
Le quadrilatère GHUT est un parallélogramme, donc $TG = UH$. Il s'ensuit que

$TU + TG = JU + UH$

Finalement :

$ST + TG = SU + JH = 57$

Cette somme vaut trois fois le côté de l'hexagone, qui est donc égal à 19.



Thème nombres

Exercice 1 Avanie et framboise

Françoise a cueilli des framboises : 756 framboises exactement. Elle les partage en parts égales avec des amis. Trois des invités ne peuvent consommer toute leur part, et en restituent le quart. C'est Françoise qui mange les framboises restantes, en plus de sa part. Elle ne se souvient que d'une chose : elle a mangé plus de 150 framboises. Combien ?

Chaque convive a reçu en partage un nombre de framboises diviseur de 756 et multiple de 4 (le quart restitué est un entier). La décomposition de 756 en produit de facteurs premiers est : $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$. Françoise a englouti sa part plus trois quarts de parts, donc $7/4$ de parts. Sa consommation étant supérieure à 150, on trouve que les parts des convives sont supérieures à 86. On peut faire une étude exhaustive, décrite dans le tableau suivant, qu'on limite aux premières lignes :

Nombre de convives	Part de chacun	Restitution (3/4 de part)	Consommation de Françoise
7	108	81	189
9	84	63	147
21	36	27	63

Françoise a mangé 189 framboises. Il y avait 6 amis pour consommer le reste.

Exercice 2 Du pareil au même

Un nombre entier n est dit *conformateur* s'il existe un entier k s'écrivant avec deux chiffres ou plus, tous identiques, tel que le produit $n \times k$ s'écrive lui aussi avec des chiffres tous identiques. Par exemple, 1, 2, 3, 4, etc. sont *conformateurs*, car $4 \times 11 = 44$, $3 \times 222 = 666$, etc.

1. Trouver un nombre *conformateur* s'écrivant avec 10 chiffres.

2. Pourquoi 11 n'est-il pas *conformateur* ?

3. Le nombre 143 est-il *conformateur* ?

1. L'idée est d'utiliser un nombre « décalant » : par exemple 1 000 100 010 001, dont le produit par tout nombre de 4 chiffres donne un nombre s'écrivant comme succession de trois copies du multiplicande :

$1\ 000\ 100\ 010\ 001 \times 1\ 234 = 1234\ 1234\ 1234$. Le fait de le multiplier par un nombre (de moins de quatre chiffres) dont tous les chiffres sont identiques ne fait apparaître qu'une partie de cette propriété.

2. On multiplie un nombre dont le chiffre des unités est a et le chiffre des dizaines a par 11. Le chiffre des unités du produit est a et celui des dizaines le reste modulo 10 de $a + a$. La condition nécessaire est $a = 0$, elle ne convient pas.

3. Quelques essais donnent $143 \times 777 = 111\ 111$. Le « décalant » caché est $1\ 001 = 7 \times 11 \times 13$.

Exercice 3 Interdiction de doubler

On désire partager en deux l'ensemble des entiers naturels 1, 2, 3 ... 2 998, 2 999, 3 000. La première partie, A, contiendra 1 000 entiers, la seconde, B, 2 000. Dans aucune de ces deux parties on ne devra trouver simultanément un entier et son double. Comment faire ?

	Attribution	Effectif provisoire	Attribution	Effectif provisoire	Attribution	Effectif provisoire	Attribution	Effectif provisoire	Attribution	Effectif provisoire
Partie B	De 1 502 à 3 000	1 499	De 376 à 751	1 875	De 94 à 187	1 969	De 23 à 46	1 993	De 6 à 11	1 999
Partie A	De 752 à 1 501	750	De 188 à 375	938	De 47 à 93	985	De 12 à 22	996	De 3 à 5	999

Il reste à placer 2 dans la partie B et 1 dans la partie A.

Exercice 4 Boîtes de canelés bordelais (Olympiades 2017)

C'est du gâteau

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.

1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?

2. a . Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.

- b.** Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n .
- c.** Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.
- 3. a.** Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?
- b.** Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?

Un algorithme glouton mais peu performant

Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

- 4. a.** Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?
- b.** Et pour répartir 75 canelés ?
- c.** Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?
- 5.** On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.
- a.** Combien de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?
- b.** Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (évidemment, sans appliquer l'algorithme) ?
- 6.** Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?

1. On ne peut pas acheter 10 canelés conditionnés, car $9 + 6 > 10$ et $6 + 6 > 10$. On ne peut pas non plus en obtenir 20, car $16 + 6 > 20$, $12 + 9 > 20$, $12 + 2 \times 6 > 20$, $4 \times 6 > 20$. En revanche, $12 + 2 \times 9 = 30$.

2. a. Liste des quantités qu'on ne peut pas conditionner dans ces boîtes :

1	2	3	4	5	7	8	10	11	13	14	17	19	20	23	26	29
---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- b.** En ajoutant 6 à chacun des nombres de cette liste, on obtient les six nombres suivants, et ainsi de suite, tous les entiers supérieurs.
- c.** On vérifie que les nombres 36, 37, 38, 39, 40 et 41 sont « atteignables », donc tous leurs successeurs aussi, mais que 35 ne l'est pas.
- 3. a.** Les nombres proposés sont tous des multiples de 3. Toute somme réalisée avec ces nombres l'est aussi, ce qui n'est pas le cas de 50.
- b.** Seuls les multiples de 3 sont susceptibles d'être atteints.
- 4. a.** On utilise trois boîtes de 16 et une boîte de 12.
- b.** On remplit 4 boîtes de 16, il reste 11, puis une boîte de 9 et il reste 2 qu'on ne sait placer.
- c.** Si on n'applique pas la méthode gloutonne, on prend 5 boîtes de 12, une boîte de 9 et une boîte de 6.
- 5. a.** On utilise 3 boîtes de 12 et 5 boîtes de 1.
- b.** Avec 5 boîtes de 8 et une boîte de 1 on parvient aussi à 41. Donc 6 boîtes au lieu de 8.
- 6.** On peut réaliser tout total de 1 à 31 (penser au système binaire).

Exercice 5 Des chiffres sous les étoiles

Dans l'égalité : $***** - ***** = 2017$, chaque étoile représente un chiffre. Les dix chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 sont représentés chacun par une étoile, chaque suite de cinq étoiles représentant un nombre entier écrit dans le système décimal. Le chiffre 0 n'apparaît pas en première position à gauche de ces nombres.

Rétablir l'égalité représentée.

Y aurait-il des solutions si on remplaçait 2 017 par 2 016 ?