Concours par équipe 2025

Eléments de solution

Exercice 1

Partie A

1. On peut découper le polygone ABCDEFGHIJK en sous polygones et calculer l'aire de chacun.
Par exemple :

$$\mathcal{A}_{\text{ABCDEFGHIJK}} = \mathcal{A}_{\text{ABEI}} + \mathcal{A}_{\text{CDE}} + \mathcal{A}_{IJ\text{K}} + \mathcal{A}_{\text{FGH}}$$
$$= 2 \times 3 + \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} + \frac{4 \times 2}{2}$$
$$= 14$$

2. $\mathcal{A}_{P_1} = \frac{1\times1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{A}_{P_2} = \frac{1\times1}{2} = \frac{1}{2}$

Plusieurs façons de faire :

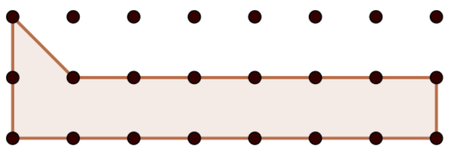
- en utilisant le fait que l'aire d'un triangle ne change pas quand on déplace un sommet parallèlement au côté opposé (la base et la hauteur restent inchangées), on remarque aisément que P_1, P_2 et P_3 ont la même aire et donc $\mathcal{A}_{P_2} = \frac{1}{2}$
- en déterminant une base et une hauteur, ici la base choisie est $\text{AB} = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) et la hauteur $\text{CH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (demi-diagonale d'un carré de côté 1).

  On en déduit que $\mathcal{A}_{P_3} = \frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2}$
- On peut diviser le trapèze en deux triangles et calculer les aires séparément ou utiliser la formule de l'aire d'un trapèze $\frac{(petite\ base\ +\ grande\ base)\times hauteur}{2}$ et on obtient alors directement $\mathcal{A}_{P_4} = \frac{(1+2)\times3}{2} = 3$.
- De nombreux découpages sont réalisables, le plus simple étant sans doute de dénombrer les carrés entièrement inclus dans le polygone puis de calculer les aires des triangles restants, on trouve $\mathcal{A}_{P_5} = 6$

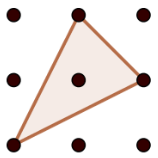
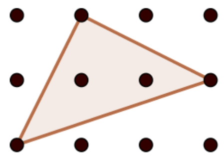
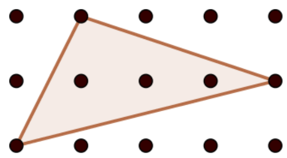
3.

Polygone	P_6	P_7
i	2	2
b	9	10
A	$\frac{11}{2}$	6

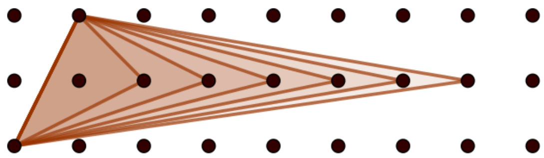
4. Exemple d'un de Pick d'aire 7,5 :



5. Les triangles de Pick ci-dessous vérifient $b = 3$.

		
$A = 1{,}5$	$A = 2{,}5$	$A = 3{,}5$

On peut généraliser à $A = i + \frac{3}{2} - 1 = i + \frac{1}{2}$ pour $i \geq 1$ en déplaçant horizontalement vers la droite autant de fois que l'on veut le sommet le « plus à droite » des triangles ci-dessus :



Partie B

1. Pour décomposer un triangle de Pick en triangles minces, on procède de la manière suivante :
S'il existe des points intérieurs au triangle initial, on en choisit un que l'on relie aux trois sommets du triangle initial, et on obtient trois triangles dont le nombre total de points intérieurs est strictement inférieur à celui du triangle initial (on retire en effet au minimum celui que l'on a relié aux sommets, peut-être d'autres qui peuvent être sur les côtés des nouveaux triangles)
Tant qu'il reste des triangles avec des points intérieurs, on répète cette opération.

Quand il ne reste plus de triangles avec des points intérieurs, on considère tous les triangles obtenus.
Pour chacun de ces triangles :

- soit il est mince, et c'est fini
- soit il n'est pas mince et comporte alors au moins un point sur un des côtés : on relie ce point au sommet opposé. Comme il n'y a plus de points intérieurs, ce nouveau segment ne contient pas de point. Donc on a bien diminué le nombre de points sur les côtés des triangles. Et s'il reste des points sur les côtés des deux nouveaux triangles, on répète l'opération.

2. a. Si le triangle mince ajouté est collé à P par un côté unique (une illustration de cette situation est le passage de P_6 à P_7) alors i reste identique et b augmente de 1, donc $i + \frac{b}{2} - 1$ augmente de $\frac{1}{2}$, comme l'aire et donc le nouveau polygone construit vérifie la formule de Pick.

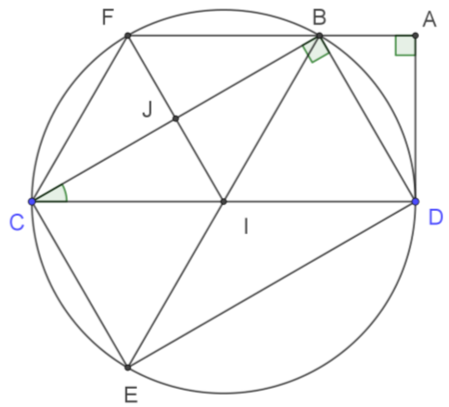
b. Si le triangle mince ajouté est collé à P par deux côtés (une illustration de cette situation est le passage de P_6 à P_5) alors i augmente de 1 et b diminue de 1, donc $i + \frac{b}{2} - 1$ est augmenté de $\frac{1}{2}$, comme l'aire et donc le nouveau polygone construit vérifie la formule de Pick.

3. Tout d'abord, un triangle mince vérifie la formule de Pick. En effet, $i = 0$, $b = 3$ et donc $i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
Considérons maintenant un polygone de Pick quelconque.
Ce polygone de Pick se décompose en un nombre fini de triangles de Pick (admis par l'énoncé), chacun de ces triangles de Pick se décomposant lui-même en un nombre fini de triangles minces (question **1.**). Ainsi on peut construire ce polygone par ajout successif des triangles minces en les collant par un ou deux côtés à ceux déjà en place.

Comme le triangle mince initial vérifie la formule de Pick, à chaque ajout d'un triangle mince, on obtient un nouveau polygone qui d'après la question 2 vérifie encore la formule de Pick. Le polygone obtenu en ajoutant tous les triangles minces de sa décomposition vérifie la formule de Pick.

Exercice 2

1.



2. $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = \widehat{ABD} + 90°$.
Or, comme les droites (AB) et (CD) sont parallèles et coupées par la droite (BD), les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ sont alternes-internes d'où $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.
En se plaçant dans le triangle BCD, rectangle en B, on obtient $\widehat{BDC} = 180° - (30° + 90°) = 60°$.
Donc $\widehat{ABC} = 60° + 90° = 150°$.
Autre méthode :
$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = \widehat{ABD} + 90°$.
En se plaçant dans le triangle BCD, rectangle en B, on obtient $\widehat{CDB} = 180° - (30° + 90°) = 60°$.
Puis $\widehat{BDA} = \widehat{CDA} - \widehat{CDB} = 90° - 60° = 30°$
Puis en se plaçant dans le triangle ABD, rectangle en A, on obtient $\widehat{ABD} = 180° - (30° + 90°) = 60°$.
Donc $\widehat{ABC} = 60° + 90° = 150°$.

3. Comme $\widehat{CBD} = 90° = \widehat{BAD}$ et $\widehat{BDC} = 60° = \widehat{ABD}$, on peut affirmer que les triangles BCD et ABD sont semblables.

4. Dans le triangle BCD rectangle en B, $\frac{BC}{CD} = \sin\widehat{BDC}$
Soit $\frac{a}{CD} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $CD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.
De plus, d'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = CD^2 - BC^2$
Soit $BD^2 = \frac{4a^2}{3} - a^2 = \frac{a^2}{3}$ d'où $BD = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
Or la question **3.** permet d'écrire les égalités :
$\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{CD}$. On a donc d'une part, $AB = \frac{BD^2}{CD} = \frac{\frac{a^2}{3}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = a\frac{\sqrt{3}}{6}$, d'autre part, $AD = \frac{BC \times BD}{CD} = \frac{a \times \frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2}$.

5. Le point I est le milieu commun aux segments [CD] et [BE] donc le quadrilatère BCED est un parallélogramme. Comme il a de plus un angle droit c'est un rectangle. Ses diagonales se coupent donc en leur milieu I et sont de même longueur.
En particulier $IB = IC = IE = ID$ donc les points B, C, E et D sont situés sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre I et comme I est le milieu de [BE], [BE] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

6. Le point J est le milieu commun aux segments [CB] et [IF] donc le quadrilatère BFCI est un parallélogramme.
De plus, la symétrie centrale conservant les mesures d'angle, $\widehat{FCB} = \widehat{BCD} = 30°$
d'où $\widehat{FCI} = \widehat{FCJ} + \widehat{JCI} = \widehat{FCB} + \widehat{BCD} = 60°$ et le triangle IFC, isocèle en C, est en fait équilatéral donc $IC = FI$ ce qui signifie que F est sur le cercle $\mathcal{C}$.

Autre méthode :
Le point J est le milieu commun aux segments [CB] et [IF] donc le quadrilatère BFCI est un parallélogramme.
De plus $CI = IB$ donc BFCI est un losange.
Comme BFCI est un losange, $\widehat{FCI} = \widehat{FCJ} + \widehat{JCI} = 2\widehat{JCI} = 60°$
Le triangle IFC, isocèle en C, est en fait équilatéral donc $IC = IF$ ce qui signifie que F est sur le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 3

Partie A

1. $(a+b)-(a-b)=2b$.
   Donc si $a+b$ est pair c'est-à-dire il existe k tel que $a+b=2k$ alors $a-b=2(k+b)$ et $a-b$ est aussi pair.
   Si $a+b$ est impair c'est-à-dire il existe k tel que $a+b=2k+1$ alors $a-b=2(k+b)+1$ et $a-b$ est aussi impair.
2. Si m vérifie la propriété P, il existe deux entiers naturels a et b tels que $m=a^2-b^2$,
   c'est-à-dire si $m=(a+b)(a-b)$.
   Les deux facteurs de ce produit sont de même parité :
   - s'ils sont pairs, le nombre m est un multiple de 4.
   - s'ils sont impairs, le nombre m est impair.
3. **a.** $40=121-81=11^2-9^2$ et $21=121-100=11^2-10^2$
   b. Si m est un multiple de 4, il existe un entier k tel que $m=4k$. On peut donc écrire
   $m=(k+1)^2-(k-1)^2$. Les multiples de 4 conviennent donc.
   c. Si m est un nombre impair, il existe un entier k tel que $m=2k+1$.
   On peut donc écrire $m=(k+1)^2-k^2$. Les nombres impairs conviennent également.
4. Le raisonnement initial montre qu'on doit éliminer les nombres pairs qui ne sont pas multiples de 4.
   Il reste donc $500+250=750$ nombres possédant la propriété.

5. Comme $a\times b\times c\times d=8\,!$, les entiers naturels a,b,c,d sont non nuls donc $(a+1)$ et $(b+1)$ sont des diviseurs strictement supérieurs à 1 de 525, dont le produit est 525. Les couples $(a+1,b+1)$ peuvent donc prendre les valeurs $(3,175)$, $(5,105)$, $(7,75)$, $(15,35)$, $(21,25)$ et leurs symétriques.
   $(b+1)$ et $(c+1)$ sont des diviseurs de 147, dont le produit est 147. Les couples $(b+1,c+1)$peuvent donc prendre les valeurs $(3,49)$, $(7,21)$ et leurs symétriques.
   Il s'ensuit que $(b+1)$ ne peut prendre que les valeurs $3,7,21$.
   Si $b=2$, il vient $a=174$, mais 29 est un diviseur de 174, mais pas de 40 320.
   Si $b=6$, il vient $a=74$, mais 37 est un diviseur de 74 et pas de 40 320.
   Si $b=20$, il vient $a=24$, divisible par 2, 3, 4 et 8, et $c=6$ puis, finalement, $d=14$.
   On vérifie que $24\times 20\times 6\times 14=3\times 8\times 4\times 5\times 6\times 2\times 7=8\,!$
   Les solutions sont donc $a=24, b=20, c=6, d=14$.