ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques

Concours par équipe

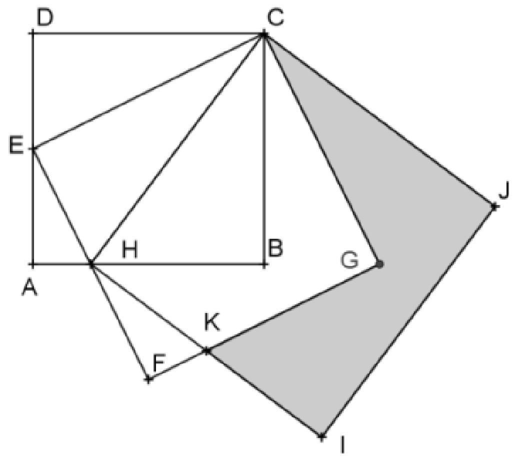
Mardi 29 mars 2022

L'épreuve dure deux heures. Les trois exercices sont à traiter. Chaque équipe remet une seule copie. Travailler en équipe suppose une **relecture collective du travail produit.** Les équipes peuvent joindre à leur copie des brouillons témoignant des pistes de recherche suivies.

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés, ainsi que la colle et les ciseaux.

Exercice numéro 1

Un carré glisse et grossit



Une unité de longueur étant choisie dans le plan, le carré ABCD a pour côté 8. Le point E étant le milieu du segment [AD], on construit sur [CE] le carré CEFG. Le côté [EF] de ce carré coupe [AB] en H.

1. ***a.*** Montrer que AH = 2.
b. Montrer que H est le milieu du segment [EF].

2. On construit sur [CH] le carré CHIJ.
a. Quelle est la longueur du côté [CH] ?
b. Montrer que K est le milieu de [HI].

3. On cherche à déterminer l'aire de la partie grisée de la figure.
a. Quelle est l'aire du carré CEFG ?
b. Quelle est l'aire du triangle CKG ?
c. Conclure.

1. ***a.*** Les triangles CDE et EAH sont rectangles et ils ont les mêmes angles aigus (les angles $\widehat{\mathrm{AEH}}$ et $\widehat{\mathrm{DEC}}$ sont complémentaires). Ces triangles sont donc semblables et $\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{DE}}$ et donc AH = 2.
b. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle EAH, rectangle en A : $\mathrm{EH}^2 = 16 + 4 = 20$,
et d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle CDE rectangle en D : $\mathrm{CE}^2 = 64 + 16 = 80$
On en déduit que $\mathrm{CE}^2 = 4 \times \mathrm{EH}^2$ et donc que $\mathrm{EF} = \mathrm{CE} = 2 \times \mathrm{EH}$.
2. ***a.*** On applique le théorème de Pythagore au triangle CEH, rectangle en E, et on obtient :
$\mathrm{CH}^2 = 80 + 20 = 100$, d'où $\mathrm{CH} = 10$.
b. La figure présentant le deuxième et le troisième carrés est exactement la même que la figure présentant le premier et le deuxième carrés, à la longueur du côté du carré de départ près. Les rapports de longueur sont conservés, donc K est le milieu de [HI].
3. ***a.*** L'aire du carré CEFG est le carré de son côté, 80.
b. Le point K est situé au quart du segment [FG] à partir de F. Le segment [KG] a donc pour longueur les trois quarts de FG et donc l'aire du triangle est les trois huitièmes de l'aire du carré.
c. Pour obtenir la partie grisée, on ôte au carré CHIJ, d'aire 100, le triangle CKG, d'aire 30 et le triangle CHK, d'aire 25. L'aire de la partie restante est $100 - 30 - 25 = 45$

Exercice numéro 2

Jeux de balles

Des balles, numérotées de 1 à 27, sont disposées dans trois paniers. La moyenne des numéros portés par les balles placées dans le premier panier (mettons qu'il est bleu) est 15. La moyenne des numéros portés par les balles placées dans le deuxième panier (mettons qu'il est blanc) est 3 et la moyenne des numéros portés par les balles placées dans le troisième panier (rouge) est 18.

1. Quelles sont les séries statistiques composées de nombres entiers distincts de moyenne 3 ?
2. Il y a trois balles dans le panier blanc. Combien y a-t-il de balles dans les autres paniers ? Donner trois exemples de composition possible du panier rouge.
3. On suppose dorénavant qu'aucun panier ne contient moins de quatre balles.
a. Pour chacune des compositions trouvées pour le panier blanc, combien y a-t-il de balles dans les paniers bleu et rouge ?
b. Donner un exemple de répartition aboutissant à chacun des résultats précédents.

1. La somme des termes d'une telle série est un entier multiple de 3. On peut faire un catalogue :

Nombre de termes	1	2	3	4	5
Possibilités	3	$\{1,5\},\{2,4\}$	$\{1,2,6\},\{1,3,5\},\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,6\},\{1,2,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$

2. La somme des numéros portés par les balles est déterminée, si on veut, par la méthode du petit Gauss :

$$\begin{cases} S = 1+2+3+4+\cdots+23+24+25+26+27 \\ S = 27+26+25+24+23+\cdots+4+3+2+1 \text{ soit } S = 378 \\ \qquad 2S = 27 \times 28 \end{cases}$$

Si on appelle x le nombre de balles dans le panier bleu et y le nombre de balles dans le panier rouge, l'hypothèse s'écrit : $15x + 9 + 18y = 378$, ou encore $5x + 6y = 123$. En tenant compte des 3 balles dans le panier blanc : $x + y = 24$, et donc $x = 21$ et $y = 3$.
Trois balles dont les numéros ont pour moyenne 18 peuvent être numérotées $17, 18, 19$. Cela peut être aussi $16, 18, 20$ ou $13, 20, 21$.

3. Si le panier blanc contient 5 balles, appelons x et y les nombres de balles contenues respectivement dans les paniers bleu et rouge. La condition sur les moyennes s'écrit : $5x + 15 + 18y = 378$ et, le nombre total de balles étant 27, $x + 5 + y = 27$. On obtient $x = y = 11$.
Supposons à présent que le panier blanc contient 4 balles. Appelons x et y les nombres de balles contenues respectivement dans les panier bleu et rouge. La première condition devient : $5x + 6y = 122$ et la seconde est $x + y = 23$. On obtient cette fois $x = 16$ et $y = 7$.
b. Des répartitions possibles
- dans le cas où le panier blanc contient les balles 1,2,3,4,5

Bleu	6	7	8	9	10	11	12	24	25	26	27
Rouge	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

- dans le cas où le panier blanc contient les balles1,2,4,5

Bleu	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	22	23	24	25	26	27
Rouge			15	16	17	18	19	20	21							

- dans le cas où le panier blanc contient les balles $1, 2, 3, 6$

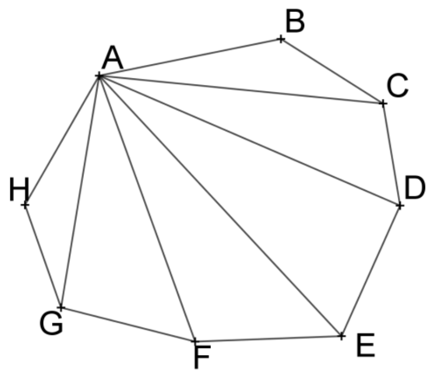
Bleu	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	22	23	24	25	26	27
Rouge			15	16	17	18	19	20	21							

Remarque : ces répartitions ne sont pas les seules possibles, car une fois qu'on a trouvé par exemple 6 entiers de moyenne 18, les autres conviennent nécessairement, et pour trouver des entiers de moyenne 18, il suffit de faire en sorte que 18 soit un centre de symétrie de la distribution.

Exercice numéro 3

Géopolitique des polygones réguliers

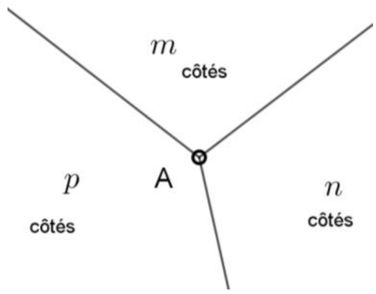
Rappel : un polygone est dit convexe *si, quel que soit celui de ses côtés qu'on considère, tous les sommets appartiennent au même demi-plan limité par le support de ce côté.*



1. a. On donne un entier n supérieur ou égal à 3 et un polygone convexe possédant n côtés. Un sommet A de ce polygone étant donné, on considère tous les triangles ayant pour sommets A et deux autres sommets consécutifs du polygone. Combien y a-t-il de tels triangles ?

b. Quelle est la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés ?

c. Combien mesurent les angles d'un polygone régulier à n côtés ?



2. Les mesures en degrés des angles de trois polygones réguliers sont des nombres entiers. Ces polygones partagent un sommet A, et leurs côtés aboutissant à A sont contenus dans trois demi-droites d'origine A.

a. Faire la figure dans le cas où les trois polygones sont des hexagones.

b. Faire la figure dans le cas où deux des polygones sont des octogones. Quelle et la nature du troisième ?

3. *a.* Quels sont les polygones réguliers dont les mesures en degrés des angles sont entières ?

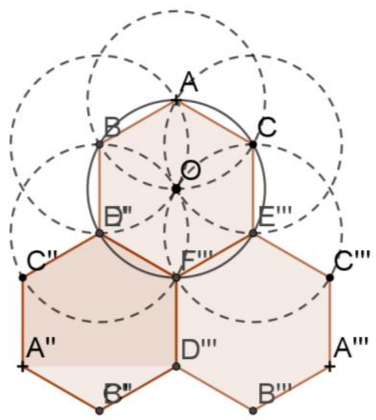
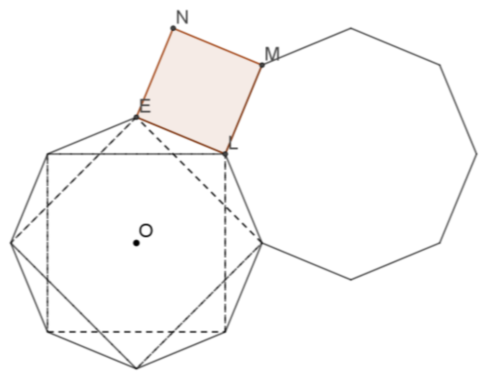
b. Quelles sont les organisations possibles de trois tels polygones s'ajustant parfaitement en un sommet ? On donnera tous les triplets (m, n, p) d'entiers correspondant au nombre croissant de côtés.

1. *a.* Le découpage proposé détermine $n-2$ triangles.

b. . La somme des angles du polygone vaut donc $(n-2)\times 180$.

c. Chaque angle mesure donc $\frac{n-2}{n}\times 180$.

2. *a. b.*

	
Trois hexagones contigus (Les traits de construction sont apparents pour le premier)	Deux octogones et un carré (Les traits de construction sont apparents pour un octogone)

3. *a.* Le seul diviseur commun envisageable pour n et $n-2$ est 2 . Il s'ensuit que ou bien n est un diviseur de 180, ou bien n est pair et double d'un diviseur de 180.

Les diviseurs de 180 supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs à 180 sont :

$3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90.$

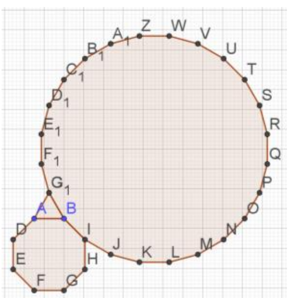
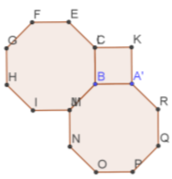
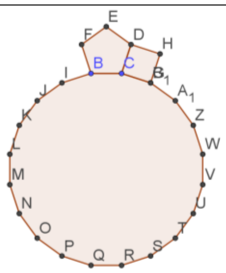
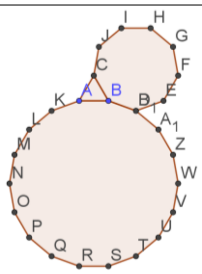
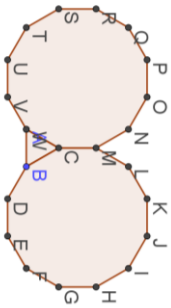
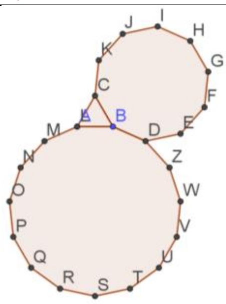
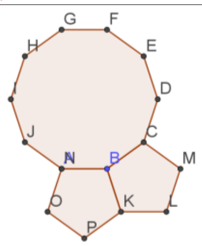
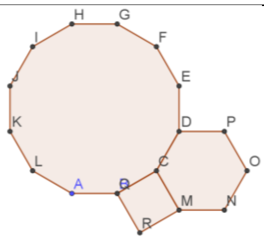
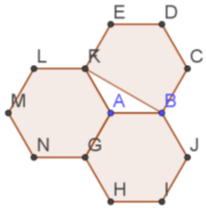
À cette liste, il convient d’ajouter les doubles des diviseurs pairs de 180 qui n’ont pas déjà été cités : $8, 24, 40, 72, 120$.
Nous devons donc étudier les systèmes de trois polygones réguliers « voisins » dont les nombres de côtés et les mesures des angles figurent dans le tableau ci-dessous :

Nombre de côtés	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18
Mesure des angles	60	90	108	120	135	140	144	150	156	160
Nombre de côtés	20	24	30	36	40	45	60	72	90	120
Mesure des angles	162	165	168	170	171	172	174	175	176	177

On cherche les triplets de mesures ceux dont la somme est 360.
Les nombres impairs $177, 175, 171, 165, 135$ doivent nécessairement être associés à un autre nombre impair et à un nombre pair, et la somme des deux nombres impairs être inférieure à 300.
Les possibilités sont $165 + 135 = 300$ et $135 + 135 = 270$. Les triplets solutions sont $(3,8, 24)$ et $(8,8,4)$.
Les nombres pairs iront 3 par 3, la somme de deux d’entre eux étant supérieure à 180 et inférieure à 300. On examine les possibilités en partant de la plus grande des trois mesures possibles :

Le plus grand		176	174	172	170	168	162	160	156
La somme des autres		174	176	188	190	192	198	200	204
Les triplets solutions							108 + 90	140 + 60	144 + 60
Le plus grand	150	150	144	140	120				
La somme des autres	210	210	216	220	240				
Les triplets solutions	120 + 90	150 +60	108 +108		120 +120				

Représentation des situations identifiées (**ce n’était pas demandé**)

				
3, 8 et 24 côtés	4, 8 et 8 côtés	4, 5 et 20 côtés		3, 9 et 18 côtés
				
3, 12 et 12 côtés	3, 10 et 15 côtés	5, 5 et 10 côtés	4, 6 et 12 côtés	6, 6 et 6 côtés