



ACADÉMIE
DE VERSAILLES

Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage en ligne de mars et avril 2021 proposé aux élèves de seconde

Fiche numéro 2

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le mardi 27 avril à l'adresse euler.pepinier@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs et selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice S2. 1 Faire bonne impression

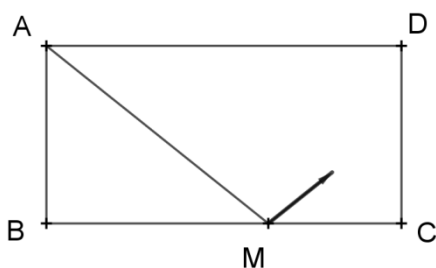
Le service reprographie d'une entreprise dispose de deux imprimantes identiques. Une fois lancées, elles enchaînent sans délai les documents et vont à la même vitesse (le temps d'impression de chaque page est considéré être le même). Préciser comment faire en sorte que les durées de service soient égales ou les plus voisines possibles dans chacune des situations suivantes :

1. On doit imprimer quatre documents comportant 1, 3, 5 et 7 pages.
2. On doit imprimer cinq documents comportant 1, 3, 5, 7 et 9 pages.
3. On doit imprimer cinquante documents dont les nombres de pages sont tous les nombres impairs compris entre 1 et 99.
4. n étant un entier donné, on doit imprimer n documents dont les nombres de pages sont tous les nombres impairs compris entre 1 et $2n - 1$.

1. Chaque imprimante peut imprimer 8 pages, 1 + 7 pour une, 3 + 5 pour l'autre.
2. Cette fois, le nombre de pages à imprimer est impair, il y en a 25. Une machine en imprimera 12 (9 + 3) et l'autre 13 (1 + 5 + 7).
3. On pourrait penser à une répartition groupant les équidistants des extrêmes : 99 + 1 pour une machine, 97 + 3 pour l'autre, 95 + 5 pour la première, etc. seulement, cela fait 25 paires de total 100. Si on conserve l'idée de grouper les effectifs par paires d'égal total, on peut grouper 99 et 93 d'un côté, 97 et 95 de l'autre, puis 91 et 85 contre 89 et 87, 83 et 77 contre 81 et 79, etc. On fait ainsi des paquets de 4, et il reste 1 et 3, ça ne va toujours pas, mais on peut partager le dernier groupe de six en 11 + 7 VS 9 + 5 + 3 + 1. Les deux machines travaillent alors de la même façon.
4. Pour n documents, on peut pratiquer de la même façon, et il ne reste rien (n est multiple de 4) ou il reste 1, ou 1 et 3 (auquel cas on procède comme pour 50) ou 1, 3, 5, 7, 9 et on groupe comme dans la question 2. On obtient chaque fois une différence inférieure ou égale à 1.

Exercice S2. 2 C'est du billard ! (Hommage à Maryam Mirzakhani)

Dans cet exercice, la boule de billard a la dimension d'un point et n'est jamais freinée.



Les dimensions de ce billard rectangulaire sont 3 et 6. Une boule part du point A et touche successivement et dans cet ordre les bandes [BC], [CD] et [AD] en les points M, N et P distincts des sommets du rectangle. Elle rebondit en formant à chaque rebond deux angles égaux avec la bande touchée. La boule croise sa trajectoire en un point Q du segment [AM].

1. Pour quelles valeurs de BM les trois bandes sont-elles bien touchées dans cet ordre ?
2. Quelle est, en fonction de BM, l'aire du quadrilatère MNPQ ?
3. Le quadrilatère MNPQ peut-il être un losange ?

1. Appelons (provisoirement) N le point d'intersection de la trajectoire de la bille avec la droite (CD). Les triangles ABM et DCM sont semblables (ils sont rectangles et ont des angles aigus de même mesure). Par conséquent $\frac{CN}{AB} = \frac{CM}{MB}$

et nous souhaitons que $\frac{CN}{AB} \leq 1$. Donc la condition sur MB s'écrit $\frac{CM}{MB} \leq$

1. Comme $CM + MB = 6$, on en déduit que $BM \geq 3$. Cette condition est suffisante pour que la bande [DA] soit également atteinte (on retrouve deux triangles semblables, mais cette fois $NP \leq 6$ est garanti).

2. Le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme (voir les égalités de mesures d'angles). L'aire du triangle MNP peut être obtenue en ôtant de l'aire du trapèze CDPM la somme des aires des triangles MCN et NDP. Il suffit de multiplier par 2 pour obtenir l'aire du parallélogramme.

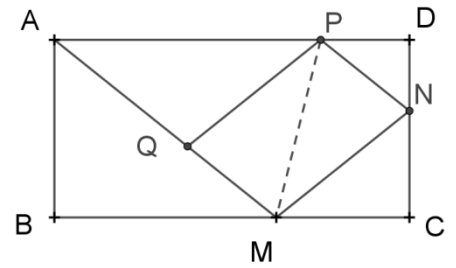
Appelons x la longueur BM. Comme vu plus haut $CN = 3 \times \frac{6-x}{x}$. L'aire du triangle MCN est donc $a_1 = 3 \frac{(6-x)^2}{2x}$. Les triangles NDP et MCN sont semblables. Le rapport de leurs aires est donc $\left(\frac{DN}{NC}\right)^2$, c'est-à-dire $\left(\frac{3}{NC} - 1\right)^2$, et comme $\frac{3}{NC} = \frac{x}{(6-x)}$, $\frac{DN}{NC} = \frac{3}{NC} - 1 = \frac{x-(6-x)}{(6-x)} = \frac{2x-6}{(6-x)}$. L'aire du triangle NDP est donc $a_2 = 3 \frac{(6-x)^2}{2x} \times \frac{(2x-6)^2}{(6-x)^2} = \frac{12(x-3)^2}{2x} = \frac{6(x-3)^2}{x}$.

Reste à déterminer la longueur PD. Du fait de la similitude des triangles NDP et NCM, on a $\frac{PD}{MC} = \frac{ND}{NC}$, et donc $PD = (6-x) \times \frac{2x-6}{(6-x)} = 2x - 6$. L'aire du trapèze PDCN est donc $a_3 = \frac{3}{2}(2x - 6 + 6 - x) = \frac{3}{2}x$

Finalement, l'aire du parallélogramme est : $a_4 = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 3 \frac{(6-x)^2}{2x} - 6 \frac{(x-3)^2}{x}\right)$

Au bout du compte, $a_4 = \frac{1}{x}(-12x^2 + 108x - 216)$

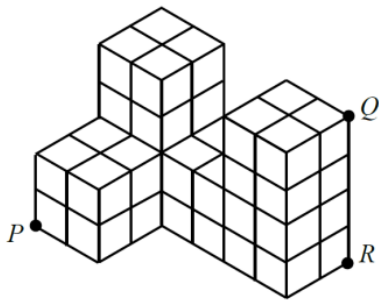
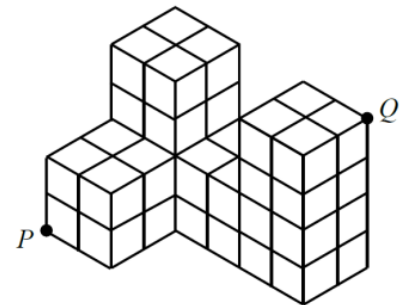
3. Le quadrilatère MNPQ, qui est un parallélogramme, est un losange si et seulement si deux de ses côtés ont la même longueur, ce qui signifie notamment que N est le milieu de [CD]. Ou encore que $CN = \frac{3}{2}$, qui conduit à $x = 4$.



Exercice S2. 3 À la crèche

Des enfants ont empilé des cubes tous identiques pour réaliser la construction ci-contre. Ils ont utilisé 48 cubes identiques dont les arêtes mesurent x .

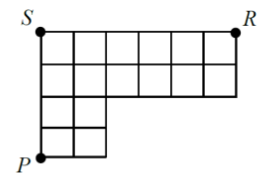
On suppose que les faces des cubes sont collées les unes aux autres. Quelle est la plus petite valeur de x pour laquelle la distance PQ est un entier ?



Exprimons la distance PQ en fonction de x . Soit R le point en bas du solide, directement en dessous de Q et soit S le point au coin arrière en bas du solide (voir figure ci-contre). La droite (QR) est perpendiculaire au plan (PRS) donc le triangle PQR est rectangle en R et en y appliquant le théorème de Pythagore, on obtient : $PQ^2 = PR^2 + QR^2$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle PSR rectangle en S , $PR^2 = PS^2 + SR^2$.

On en tire $PQ^2 = PS^2 + SR^2 + QR^2 = (4x)^2 + (6x)^2 + (4x)^2 = 68x^2$ et $PQ = x\sqrt{68} = 2x\sqrt{17}$.

La plus petite valeur de x pour laquelle PQ est un entier est celle pour laquelle PQ vaut 1, c'est-à-dire $x = \frac{1}{2\sqrt{17}}$.



Exercice S2. 4 À la fin, reste 1

Montrer que si trois nombres sont tels que le produit de ces trois nombres vaut 1 et la somme de ces trois nombres est égale à la somme de leurs inverses, alors l'un au moins des trois nombres est égal à 1.

Soit x, y, z ces trois nombres. Ils doivent être solution du système
$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{cases}$$

Une fois la réduction au même dénominateur effectuée dans la deuxième équation et, en tenant compte de l'égalité $xyz = 1$, on obtient : $x + y + z = xy + yz + zx$.

Cette équation s'écrit aussi $x(1 - z) + y(1 - z) + z - xy = 0$ soit $x(1 - z) + y(1 - z) + z - 1 + 1 - xy = 0$

Soit $x(1 - z) + y(1 - z) - (1 - z) + xyz - xy = 0$ soit $x(1 - z) + y(1 - z) - (1 - z) - (1 - z)xy = 0$

Soit $(1 - z)(x + y - 1 - xy) = 0$.

Nécessairement $z = 1$ ou $x + y - 1 - xy = 0$.

La deuxième équation s'écrit aussi $(x - 1)(1 - y) = 0$ soit $x = 1$ ou $y = 1$.

Exercice S2. 5 C'est la foule, au club de math

Au lycée Leonhard Euler, le club de mathématiques comporte n élèves. L'animatrice du club, Madame Sophie Germain, fait travailler les élèves en équipe. Elle fait les observations suivantes :

1. Lorsque Mme Germain tente de répartir les n élèves en groupes de 4 et qu'elle a formé le maximum de groupes complets, il lui reste un groupe de moins de 4 élèves.
 2. Lorsque Mme Germain tente de répartir les n élèves en groupes de 3, elle réussit à former 3 groupes complets de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves mais il lui reste encore un groupe incomplet.
 3. Lorsque Mme Germain tente de répartir les n élèves en groupes de 2, elle réussit à former 5 groupes complets de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves mais il lui reste encore un groupe incomplet.
- Quelle est la somme des chiffres de l'entier $n^2 - n$?

Soit g le nombre de groupes complets dans la répartition par groupes de 2. Le groupe incomplet comporte un seul élève. On en déduit que $n = 2g + 1$.

De plus, d'après (3), le nombre de groupes de 3 élèves vaut $g - 5$ et le groupe incomplet dans la répartition par 3 comporte 1 ou 2 élèves donc $n = 3(g - 5) + 1$ ou $n = 3(g - 5) + 2$.

Dans le 1^{er} cas, l'égalité $2g + 1 = 3(g - 5) + 1$ donne $g = 15$ et $n = 31$. Le nombre de groupes complets de 3 est alors égal à 10 et le nombre de groupes complets de 4 est égal à 7. La condition (2) est alors bien vérifiée.

Dans le 2^e cas, l'égalité $2g + 1 = 3(g - 5) + 2$ donne $g = 14$ et $n = 29$. Le nombre de groupes complets de 3 est alors égal à 9 et le nombre de groupes complets de 4 est égal à 7. La condition (2) n'est alors pas vérifiée.

On a donc $n = 31$, $n^2 = 961$, $n^2 - n = 930$ et la somme des chiffres de $n^2 - n$ est égale à 12.

Exercice S2. 6 Différences de deux carrés

On voudrait savoir combien, parmi les nombres entiers compris entre 1 et 999, peuvent être écrits comme différences de deux carrés. Par exemple $17 = 81 - 64$, $62 = 121 - 49$, etc.

1. Montrer que tous les nombres impairs possèdent cette propriété.
2. Montrer que tous les multiples de 4 possèdent cette propriété.
3. Qu'en est-il des nombres qui sont produits de 2 par les nombres impairs ?
4. Conclure.

1. Soit N un nombre impair. Il existe un entier p tel que $N = 2p + 1$.

On peut alors écrire $N = (p + 1 - p)(p + 1 + p)$ et donc la propriété est vérifiée en prenant $a = p + 1$ et $b = p$.

2. Soit N un multiple de 4. Il existe un entier p tel que $N = 4p$.

On peut alors écrire $n = (p + 1 - (p - 1))(p + 1 + (p - 1))$ et la propriété est vérifiée en prenant $a = p + 1$ et $b = p - 1$.

3. Si on peut écrire $N = (a - b)(a + b)$, alors, les deux facteurs $a - b$ et $a + b$ étant de même parité, soit les deux sont pairs, soit les deux sont impairs. Comme N est pair, c'est nécessairement la première possibilité qui reste. Mais si les deux facteurs sont pairs, leur produit est multiple de 4. Donc il n'y a pas de solution.

4. Les nombres cherchés sont donc tous les nombres compris entre 1 et 999 sauf les doubles des entiers impairs. Il y en a autant que de nombres impairs compris entre 1 et 499, soit 250. L'effectif cherché est donc $999 - 250 = 749$.

Exercice S2. 7 Phil sans téléphone

Quand elle est entièrement déchargée, il faut deux heures pour recharger la batterie du téléphone de Phil. Quand Phil utilise son appareil alors qu'il est en charge, 40% de l'énergie fournie est immédiatement dissipée.

Aujourd'hui, Phil rentre chez lui à 18 heures, son appareil entièrement déchargé. Il le met en charge et, simultanément, se met à téléphoner. Combien de temps pourra-t-il téléphoner, espérant ressortir à 20 h 30 avec un appareil entièrement chargé ?

On commence par établir des taux horaires, pour la charge seule et pour la charge en situation d'utilisation : la batterie se charge à moitié (0,5) en une heure, et à 30% en une heure si le téléphone est utilisé.

Supposons que Phil téléphone pendant x heures et charge son appareil sans téléphoner pendant $2,5 - x$ heures. La charge de la batterie est au total

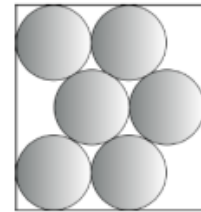
$$(2,5 - x) \times 0,5 + x \times 0,3 = 1$$

Cette équation s'écrit $0,2x = 0,25$ et donc $x = 1,25$

Résultat exprimé en heures. Phil peut s'exprimer pendant 75 minutes...

Exercice S2. 8 Tri sélectif

Après le réveillon du nouvel an (avec modération), le père de Justin lui a demandé d'aller déposer des bouteilles vides dans le conteneur idoine de la déchèterie. Afin de faciliter le transport, Justin a placé six de ces bouteilles dans une boîte de fond rectangulaire qu'il a trouvée et dans laquelle elles entrent tout juste, avec la configuration illustrée ci-contre (vue de haut).



Sachant que chaque bouteille a un diamètre de 10 centimètres, quelles sont les dimensions exactes du fond de la boîte ?

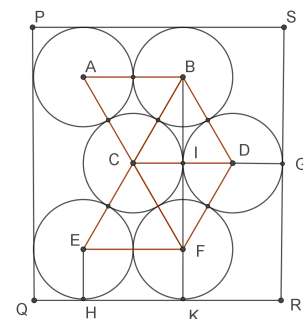
On relie entre eux les centres des cercles représentant les fonds de bouteilles.

On obtient ainsi des triangles équilatéraux puisque les côtés de ces triangles mesurent tous 5 cm.

On considère les projetés orthogonaux respectifs H et K des centres E et F sur le côté $[QR]$. Alors $HK = EF = 10$.

K est aussi le projeté orthogonal du point I qui est le centre du losange $BCFD$ et si on note G le projeté orthogonal du centre D sur (RS) , alors $KR = IG = 10$.

Enfin $QH = 5$.



On en déduit que $QR = QH + HK + KR = 25$.

D'autre part, par symétrie de la figure, $RS = 2GR = 2IK = 2(IF + FK)$.

IF est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 10 donc $IF = \frac{10\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit que $RS = 10(1 + \sqrt{3})$.