1 Deux rationnels pour un irrationnel ?

1.1 Énoncé

Soit $a, b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Q}$. Montrer que

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} = c\right) \Rightarrow \left(\exists m, n \in \mathbb{N}; a = m^2, b = n^2\right).$$

1.2 Solution

Si $c = 0$, a et b sont nuls et donc des carrés. Si l'un des a et b est nul, alors la racine carrée de l'autre est rationnelle (donc entière), donc c'est un carré.

On suppose désormais a, b, c non nuls, et

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c.$$

Alors, en élevant notre relation au carré,

$$a + b + 2\sqrt{ab} = c^2,$$

donc $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(c^2 - a - b\right)$ est un rationnel. Comme ab est entier, on en déduit que ab est un carré (et que c doit être entier). $\exists k \in \mathbb{N}$, $ab = k^2$. On a donc

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \frac{k}{\sqrt{a}} = c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{a+k}{c}.$$

On en déduit que $\sqrt{a}$ est rationnel et, par le même raisonnement, a est un carré, et b aussi par symétrie du problème.

1.3 Preuve que la racine carrée d'un entier est soit entière, soit irrationnelle

Proposition. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors soit $\sqrt{N}$ est entier (donc N est un carré), soit $\sqrt{N}$ est irrationnel.*

La preuve classique est par l'absurde, en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique (décomposition unique en puissance de nombre premiers). Voici ci-dessous deux autres preuves plus inhabituelles.

1.3.1 Preuve directe avec la relation de Bézout

Supposons que $\sqrt{N}$ soit rationnel, alors $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\sqrt{N} = p/q$ et $p \wedge q = 1$. Comme p et q sont premiers entre eux, on peut utiliser la relation de Bézout. $\exists a, b \in \mathbb{Z}$,

$$ap + bq = 1.$$

On en déduit :

$$0 = \left(p - q\sqrt{N}\right)\left(b - a\sqrt{N}\right) = pb + aqN - \sqrt{N}.$$

Conclusion, $\sqrt{N} = pb + aqN \in \mathbb{Z}$ (et même $\mathbb{N}$ car $\sqrt{N}$ est positif).

1.3.2 Preuve par l'absurde en encadrant le nombre entre deux carrés consécutifs

Par contraposée : Si $N \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré alors $\exists n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 < N < (n+1)^2.$$

Donc, par stricte croissance de la racine carrée,

$$0 < \sqrt{N} - n < 1.$$

Si on suppose $\sqrt{N}$ rationnel, alors il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\sqrt{N} = p/q$. De plus, on suppose que q est le nombre minimal tel que $q\sqrt{N}$ soit entier. On a donc

$$q\left(\sqrt{N} - n\right)\sqrt{N} = qN - nq\sqrt{N}$$

qui est aussi un entier. Mais comme $\sqrt{N} - n < 1$, on en déduit que $q\left(\sqrt{N} - n\right)$ est un nombre entier strictement plus petit que q qui remplit les conditions de q, contradiction. Conclusion, $\sqrt{N}$ ne peut pas être rationnel.

2 Batailles de radicaux

2.1 Énoncé

Trouver $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{219 + \sqrt{10080} + \sqrt{12600} + \sqrt{35280}}$$

2.2 Solution

On élève au carré notre relation.

$$a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} = 219 + \sqrt{10080} + \sqrt{12600} + \sqrt{35280}$$

On peut simplifier les radicandes :

$$10080 = 10 \times 9 \times 112 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 56 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 28 = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 12^2 \times 70,$$
$$12600 = 10^2 \times 9 \times 14 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 30^2 \times 14,$$
$$35280 = 10 \times 9 \times 392 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 196 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 98 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 84^2 \times 5.$$

On a donc

$$219 + \sqrt{10080} + \sqrt{12600} + \sqrt{35280} = 219 + 2 \times 6\sqrt{70} + 2 \times 15\sqrt{14} + 2 \times 42\sqrt{5},$$

et on peut rechercher des solutions en établissant le système d'équations (en identifiant les racines carrées de manière arbitraire, étant donné qu'ici les rôles de a, b, c sont interchangeables),

$$\begin{cases} a + b + c & = 219 \\ \sqrt{ab} & = 6\sqrt{70} \\ \sqrt{bc} & = 15\sqrt{14} \\ \sqrt{ac} & = 42\sqrt{5} \end{cases}.$$

On en déduit :

$$a = \frac{\sqrt{ab}\sqrt{ac}}{\sqrt{bc}} = \frac{6\sqrt{70} \times 42\sqrt{5}}{15\sqrt{14}} = \frac{2 \times 42 \times 5}{5} = 84,$$
$$b = \frac{\sqrt{ab}\sqrt{bc}}{\sqrt{ac}} = \frac{15\sqrt{14} \times 6\sqrt{70}}{42\sqrt{5}} = \frac{15 \times 14 \times \sqrt{5}}{7\sqrt{5}} = 30,$$
$$c = \frac{\sqrt{ac}\sqrt{bc}}{\sqrt{ab}} = \frac{42\sqrt{5} \times 15\sqrt{14}}{6\sqrt{70}} = 7 \times 15 = 105,$$

et on a bien $84 + 30 + 105 = 219$.

On note qu'on peut aussi résoudre le système de manière déductive en cherchant les facteurs qui sont communs à deux des produits mais pas au troisième. On voit ainsi, d'après nos décompositions en nombres premiers des radicandes :

$$ab = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$$
$$bc = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$
$$ac = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$

ce qui nous donne $a = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$, $b = 2 \times 3 \times 5 = 30$ et $c = 3 \times 5 \times 7 = 105$. On vérifie aussi $84 + 30 + 105 = 219$.

3 Et si la différence de deux cubes est un carré ?

3.1 Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\exists c \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)^3 - n^3 = c^2.$$

Montrer que $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tels que $c = p^2 + q^2$.

3.2 Solution

Note : le cube d'un impair est impair, le cube d'un nombre pair est pair, donc on sait que c^2, et donc c, est impair.

(Justification : si p est impair, alors $p \equiv 1\,[2]$ et donc $p^3 \equiv 1^3\,[2]$, on en déduit que p^3 est impair. De même p pair $\Rightarrow p^3$ pair, et la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire.)

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{gathered}
(n+1)^3 - n^3 = c^2, \\
3n^2 + 3n + 1 = c^2, \\
12n^2 + 12n + 4 = 4c^2, \\
3\,(2n+1)^2 + 1 = 4c^2, \\
3\,(2n+1)^2 = (2c-1)\,(2c+1)\,.
\end{gathered}$$

Comme $(2c+1) \wedge (2c-1) = 1$ (impairs consécutifs), $2c+1$ et $2c-1$ sont l'un et l'autre de type suivant :

- un carré ;
- 3 multiplié par un carré.

On peut donc discerner les cas suivants :

- Si $2c+1$ est un carré, comme c'est un nombre impair, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $2c+1 = (2k+1)^2$. Alors :

  $$\begin{gathered}
  2c+1 = (2k+1)^2 \\
  \Leftrightarrow 2c = 4\,(k+1) \\
  \Leftrightarrow c = 2\,(k+1)\,.
  \end{gathered}$$

  On en déduit que c est pair, contradiction.

- Si $2c-1$ est un carré, comme c'est un nombre impair, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $2c-1 = (2k+1)^2$. Donc,

  $$\begin{gathered}
  2c-1 = 4k^2 + 4k + 1 \\
  \Leftrightarrow c = 2k^2 + 2k + 1 \\
  \Leftrightarrow c = k^2 + (k+1)^2\,.
  \end{gathered}$$

  c est donc la somme de deux carrés (et même consécutifs).

4 Dans le désordre

5 Sommes de fractions

6 Une écriture historique mais plus qu'ambiguë

6.1 Énoncé

Trouver une expression plus simple de :

$$\sqrt[3]{52+\sqrt{-2209}}+\sqrt[3]{52-\sqrt{-2209}}.$$

6.2 Solution

D'abord, on constate :

$$2209 = 47^2.$$

Ici, qu'importe que l'on choisisse $\sqrt{-2209} = 47i$ ou $-47i$, on a la même expression à cause de la symétrie. On en déduitm comme les deux termes sont conjugués :

$$\sqrt[3]{52+47i}+\sqrt[3]{52-47i} = 2\Re\left(\sqrt[3]{52+47i}\right).$$

On cherche donc un nombre complexe $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dont le cube est $52+47i$. En développant,

$$52+47i = (a+ib)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - ib^3 = a\left(a^2-3b^2\right) + ib\left(3a^2-b^2\right).$$

Deux nombre complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales, donc il faut résoudre le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} a\left(a^2-3b^2\right) & = 52 \\ b\left(3a^2-b^2\right) & = 47 \end{cases}.$$

Le plus naturel est de chercher des solutions entières, donc de chercher a et b comme des diviseurs respectifs de $52 = 2^2 \times 13$ et 47 (premier). $a = 4$ et $b = 1$ conviennent. On en déduit

$$52+47i = (4+i)^3,$$

et enfin

$$2\Re(4+i) = 8,$$

mais ce n'est pas la seule solution. En fait, comme $\left(e^{\pm 2i\pi/3}\right)^3 = 1$,

$$52+47i = (4+i)^3 = \left[(4+i)\,e^{i2\pi/3}\right]^3 = \left[(4+i)\,e^{-i2\pi/3}\right]^3$$

avec

$$e^{\pm i2\pi/3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit :

$$(4+i)\,e^{\pm i2\pi/3} = -2 \mp \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2} \pm 2\sqrt{3}\right),$$

et donc les trois représentations possibles du nombre de départ sont deux fois la partie réelle des nombres précédents,

$$8; -4-\sqrt{3}; -4+\sqrt{3}.$$

Comme la racine carrée d'un nombre complexe, la racine cubique donne plusieurs possibilités, dont on doit choisir quelle est la racine principale. Étant donné un nombre complexe $re^{i\theta}$, on choisit généralement la racine cubique principale $\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}$, ce qui présente le désavantage de donner une racine cubique complexe (non réelle) pour tout nombre négatif, contrairement à sa définition sur les réels. La racine cubique principale coïncide néanmoins avec la racine cubique usuelle sur les réels positifs.

On note aussi que les nombres trouvés sont racines du polynôme de degré 3 suivant :

$$X^3 - 51X - 104,$$

que l'on peut déterminer en effectuant le cube de l'expression de départ. En utilisant la racine $X = 8$ trouvée précédemment, on peut factoriser ce polynôme par $X - 8$ et l'autre facteur est un polynôme de degré 2, dont on peut déterminer les deux racines réelles grâce au discriminant. C'est d'ailleurs le type de polynôme (cubique sous forme réduite) dont Tartaglia cherchait les racines en utilisant les expressions dangereuses introduites dans cet exercice.

7 Accommoder les restes

7.1 Énoncé

$13 \equiv 4\,[9]$, $13 \equiv 6\,[7]$ et $13 \equiv 3\,[5]$, et $4+6+3=13$. Cela arrive-t-il souvent ?

1. Soit $n, a, b \in \mathbb{N}$ avec $a < n$ et $b < n$. On définit $p, q \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$n \equiv p\,[a]\,,$$

$$n \equiv q\,[b]\,.$$

   Montrer que $p + q < n$.

2. Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ strictement supérieurs a 229 tels que les restes des divisions euclidiennes par 99, 132, 229 soient de somme n ?

7.2 Solution

1. - On suppose que $2a \leq n$. Alors la division euclidienne s'écrit :

$$\begin{cases} n = ak + p \\ 0 \leq p < a \end{cases},$$

   avec $k > 1$. On en déduit $2p = 2n - 2ak < n$, donc $2p < n$.

   - Si $2a > n$, alors $p = n - a$ et

$$\begin{cases} n = a + (n-a) \\ 0 \leq n - a < a \end{cases}.$$

   Or, $2n - 2a < 2n - n$, donc $2\,(n-a) < n$. On en déduit $2p < n$.

   Dans les deux cas, $2p < n$, donc p est toujours inférieur à la moitié de n. Le raisonnement est le même pour q, d'où le résultat $p + q < n$.

2. On cherche $n > 229$. On appelle r, s, t les restes des divisions euclidiennes de n par 99, 132, 229. Alors,

   - $n - r$ est un multiple de 99 et $0 \leq r \leq 98$;
   - $n - s$ est un multiple de 132 et $0 \leq s \leq 131$;
   - $n - t$ est un multiple de 229 et $0 \leq t \leq 228$;
   - $r + s + t = n$ par hypothèse. On a donc $n \leq 98 + 131 + 228 = 457$.

   Mais comme $r + s = n - t$ est un multiple de 229 et $r + s \leq 98 + 131 = 229$, on en déduit que $r + s = 229$. Mais comme $r \leq 98$ et $s \leq 131$, la seule solution possible est $r = 98$ et $s = 131$. Il existe donc $k, l \in \mathbb{N}$ tels que

$$n = 99k + 31,$$

$$n = 132l + 131.$$

   - Première méthode :

$$n + 1 = 99\,(k+1) = 132\,(l+1)\,,$$

   donc $n+1$ est divisible par $\mathrm{ppcm}\,(99, 132) = 396$ (justification : $99 = 3^2 \times 11$ et $132 = 2^2 \times 3 \times 11$, donc $\mathrm{ppcm}\,(99, 132) = 2^2 \times 3^2 \times 11 = 36 \times 11 = 396$). Mais comme $n + 1 \leq 458$, on en déduit $n = 395$. Le troisième reste s'écrit alors :

$$t = 395 - 229 = 166.$$

- Autre méthode :
  On constate que $229 < n \leq 457$, donc $2 \leq k \leq 4$ et $1 \leq l \leq 2$. D'autre part,

$$2n = 229 + 99k + 132l$$

  Comme $2n$ est pair, k doit être impair. On en déduit $k = 3$ et :

$$n = 99 \times 3 + 98 = 395,$$

$$132l = 395 - 131 = 2 \times 132.$$

  Le troisième reste s'écrit :

$$t = 395 - 229 = 166.$$