ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage en ligne de mars et avril 2021 proposé aux élèves de seconde

Fiche numéro 1

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le mardi 6 avril à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs et selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice S1. 1 Le retournement d'une fonction affine
La fonction f est telle qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x : $f(x) = ax + b$ et $f(bx + a) = x$. Que sont a et b ?
Pour tout réel x, on a : $x = f(bx + a) = a(bx + a) + b$, ce qui s'écrit aussi :
Pour tout réel x, $abx + a^2 + b = x$ et donc $ab = 1$ et $a^2 + b = 0$. On en déduit que $b = -a^2$, puis que $-a^3 = 1$ et donc $a = -1$ et $b = -1$. La fonction cherchée est donc donnée par $f(x) = -x - 1$.
On a procédé par conditions nécessaires, reste à vérifier que $f(-x - 1) = -(-x - 1) - 1 = x$, ce qui est vrai.

Exercice S1. 2 Un critère de divisibilité par 7
Un nombre entier N s'écrit avec deux chiffres dans le système décimal, le chiffre des dizaines d et le chiffre des unités u. Montrer que N est multiple de 7 si et seulement si le nombre $5u + d$ est multiple de 7.

Supposons que le nombre N soit multiple de 7. Il existe un entier k tel que $10d + u = 7k$. On en déduit que $50d + 5u = 35k$ et encore $5u + d = 7 \times (5k - 7d)$ et donc $5u + d$ est multiple de 7.
Réciproquement, s'il existe un entier h tel que $5u + d = 7h$, On peut écrire $50u + 10d = 70h$,
et donc $10d + u = 7(10h - 7u)$, d'où il ressort que N est multiple de 7.
Remarque : ce critère de divisibilité sert plus à s'entraîner aux petits raisonnements arithmétiques qu'à identifier les 14 multiples de 7 compris entre 1 et 100, comme le montre le tableau suivant :

$10d + u$	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98
$5u + d$	35	21	7	42	28	14	49	35	21	7	42	28	14	49

Sept des quatorze multiples de 7 inférieurs à 100 se répètent sur la deuxième ligne…

Exercice S1. 3 Un air de famille
Le nombre entier N, écrit dans le système décimal, et son carré N^2 se terminent par la même suite de chiffres $\overline{abcd}$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $\overline{abcd}$?

Remarquons pour commencer que le chiffre des unités de N^2 est le chiffre des unités de d^2. Les possibilités sont $d = 0, d = 1, d = 5\,, d = 6$.

- Si le chiffre des unités du nombre N est 0, l'écriture de son carré se termine par 00, ce qui conduit à un type de solution : $N = n \times 10^4$.
- Si l'écriture du nombre N se termine par un 1, c'est qu'il existe un entier M, tel que : $N = 10M + 1$.

On a donc $N^2 = 100M^2 + 20M + 1$ et, si on appelle u le chiffre des unités de M, le chiffre des dizaines de N^2 est $2u$ ou $2u - 10$. La seule solution est $u = 0$.
On procède de même au rang suivant avec – mutatis mutandis – le même résultat. Les solutions sont donc du type $N = n \times 10^4 + 1$.

- Si le chiffre des unités du nombre N est 5, on pose de même $N = 10M + 5$

et on obtient $N^2 = 100M^2 + 100M + 25$. Le chiffre des unités de M est donc 2. Posons $M = 10P + 2$
Alors $N = 100P + 25$ et on obtient $N^2 = 10^4P^2 + 5\,000P + 625$ et on en conclut que le chiffre des centaines de M est 6. La dernière étape consiste à poser $N = 1\,000P + 625$,

pour obtenir $N^2 = 10^6P^2 + 1\,250\,000P + 390\,625$, et on vérifie que les nombres se terminant par 0625 ont un carré se terminant par la même suite de chiffres (625 n'en fait pas partie, au nom du principe qui veut qu'on n'écrive pas les 0 inutiles).

- Si le chiffre des unités de N est 6, il existe un entier M tel que $N = 10M + 6$. On a alors $N^2 = 100M^2 + 120M + 36$. Si u est le chiffre des unités de M, il existe un entier P tel que $M = 10P + u$ de sorte que $N = 100P + 10u + 6$ et alors il existe un entier K tel que $N^2 = 100K + 10(2u + 3) + 6$ et N^2 se termine par $\overline{t6}$, où $t = 2u + 3$ ou $t = 6u + 3 - 10$. Comme on veut que $t = u$, il ne reste comme solution que $u = 7$.

On poursuit les investigations : S'il existe M entier tel que $N = 100M + 76$, alors $N^2 = 10^4M + 200M \times 76 + 5\,776$.
On peut terminer « à la main » ou à la machine et trouver la solution $N = 10^4n + 9\,376$.
Les suites de quatre chiffres possibles sont donc $0000, 0001, 0625$ et 9376

Exercice S1. 4 Champs catalauniques
Dans le système décimal, existe-t-il un multiple de 81 ne s'écrivant qu'avec des « 1 » ?

Le nombre cherché étant un multiple de 81, il est aussi un multiple de 9. Il est donc constitué d'un nombre de « 1 » multiple de 9.
La division euclidienne de $111\,111\,111$ par 81 a pour reste 9.
La division euclidienne de $\underbrace{111\,111\,111}\ \underbrace{111\,111\,111}$ par 81 a donc le même reste que la division euclidienne de $9\,111\,111\,111$ par 81. Ce reste est 18.
Le reste de la division euclidienne de $\underbrace{111\,111\,111}\ \underbrace{111\,111\,111}\,\underbrace{111\,111\,111}$ par 81 est donc le même que celui de la division euclidienne de$18\,\underbrace{111\,111\,111}$ par 81 et ainsi de suite. Sans jamais dépasser au dividende un entier ayant plus de onze chiffres, on trouve que le nombre qui s'écrit avec 81 chiffres « 1 » est un multiple de 81.

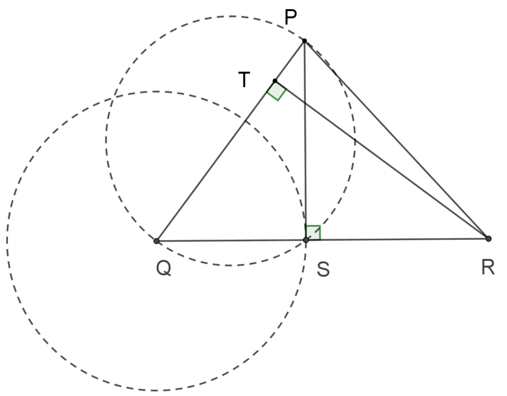
Exercice S1 .5 Un problème de construction
Avertissement : la question « construire un triangle » appelle comme réponse une explication argumentée ***et*** *une figure. Un dessin ne suffit pas.*

Dans un triangle PQR dont les angles sont tous aigus, on note respectivement S et T les pieds des hauteurs issues de P et R.
On suppose que $PT = 1$, $TQ = 4$ et $QS = 3$.
1. Construire un tel triangle. Combien de possibilités a-t-on ?
2. Déterminer la distance SR.

Comme tous les angles du triangle sont aigus, $T \in [PQ]$ et $S \in [QR]$, d'où

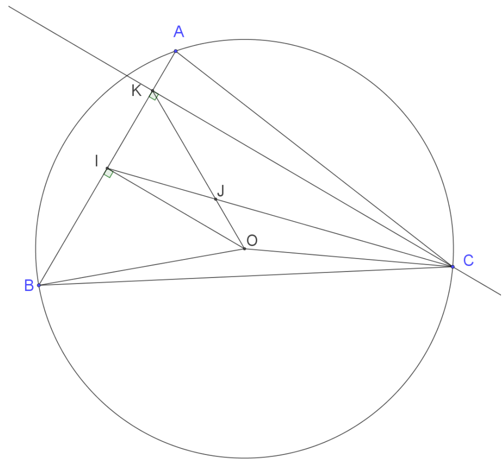
$$PQ = PT + TQ = 5$$

On peut donc tracer le segment et y placer le point T. On trace ensuite la perpendiculaire (D) à (PQ) passant par T.
On construit ensuite le cercle de centre Q de rayon 3 et le cercle de diamètre $[PQ]$. On obtient deux points d'intersection S. Le point R est obtenu comme intersection des droites (D) et (QS).
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle PQS, $PS = 4$.
Les triangles PQS et STQ sont rectangles avec le sommet Q en commun. Ils sont donc semblables ce qui permet d'obtenir $QR = \frac{20}{3}$ puis $SR = \frac{20}{3} - 3 = \frac{11}{3}$

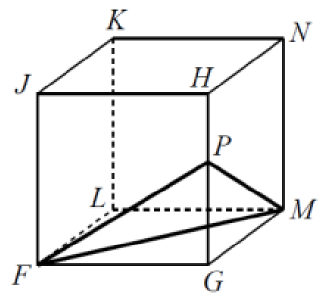


Exercice S1. 6 Partage équitable
Soit ABC un triangle dont les mesures des angles sont toutes inférieurs à 90° et tel que $AC \neq BC$. On note K le pied de la hauteur issue de C dans ce triangle et O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
Montrer que les quadrilatères $AKOC$ et $BKOC$ ont même aire.

Les mesures des angles du triangle ABC sont toutes inférieures à 90° dont le point O est à l'intérieur du triangle.
Notons I le milieu de $[AB]$ et J le point d'intersection de $[OK]$ et $[CI]$.
Les triangles CIB et CIA ont alors même aire (base de même longueur et même hauteur (CK)).
D'autre part, (OI) est la médiatrice de $[AB]$. Donc les droites (OI) et (CK) sont parallèles car perpendiculaires à (AB). Les triangles COI et KOI ont donc même aire (même base de longueur OI et hauteurs de même longueur KI).
On en déduit que les triangles COJ et KIJ ont même aire.
D'où $\mathcal{A}_{AKOC} = \mathcal{A}_{CIA} - \mathcal{A}_{KIJ} + \mathcal{A}_{COJ} = \mathcal{A}_{CIA}$
Et $\mathcal{A}_{BKOC} = \mathcal{A}_{CIB} + \mathcal{A}_{KIJ} - \mathcal{A}_{COJ} = \mathcal{A}_{CIB}$,
ce qui permet de conclure



Exercice S1. 7
On considère un cube $FGHJLMNK$ comme sur la figure ci-contre.
On suppose que les arêtes du cube ont pour longueur 200.
On considère un point P sur l'arête $[GH]$ tel que, si la perpendiculaire au plan (PFM) passant par le point G coupe ce plan en un point I, alors $GI = 100$.
Déterminer la longueur HP.



Notons $GP = x$. Alors $HP = 200 - x$.
Or le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $FGMP$ peut être calculé de deux façons différentes :

- en prenant le triangle FGM comme base et donc PG comme hauteur puisque la droite (GP) est perpendiculaire aux droites (GM) et (GF) donc au plan (FGM) : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}GP \times \mathcal{A}_{FGM} = \frac{1}{3}x\frac{200\times200}{2}$
- en prenant le triangle FPM comme base et donc GI comme hauteur : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}GI \times \mathcal{A}_{FPM} = \frac{100}{3}\mathcal{A}_{FPM}$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle FGM rectangle en G,
on obtient $FM = \sqrt{80\,000} = 200\sqrt{2}$
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle FGP rectangle en G, on obtient $FP^2 = x^2 + 40\,000$
On obtient de même $MP = \sqrt{x^2 + 40\,000}$. Le triangle FPM est donc isocèle en P et, si T désigne le milieu de $[FM]$, alors :

- d'une part, $[TP]$ est la hauteur du triangle FPM, issue de P et $FT = TM = 100\sqrt{2}$;
- d'autre part, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle FTQP rectangle en P, on obtient $TP = \sqrt{FP^2 - FT^2} = \sqrt{x^2 + 40\,000 - 20\,000} = \sqrt{x^2 + 20\,000}$.

En reportant, $\mathcal{A}_{FPM} = \frac{FM\times TP}{2} = \frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}$
et $\mathcal{V} = \frac{100}{3} \times \frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} = \frac{20\,000\sqrt{2}}{6} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}$.
Les deux expressions de $\mathcal{V}$ aboutissent à l'égalité :

$$20\,000\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} = 200 \times 200x$$

Soit $\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} = 2x$ soit, puisque $x \geq 0$, $2(x^2 + 20\,000) = 4x^2$ soit $x^2 = 20\,000$
c'est-à-dire $x = 100\sqrt{2}$, d'où on déduit $HP = 200 - 100\sqrt{2}$.

Exercice S1. Irréductibles
Parmi les écritures fractionnaires $\frac{1}{1\,800}, \frac{2}{1\,800}, \frac{3}{1\,800}, \dots, \frac{1\,798}{1\,800}, \frac{1\,799}{1\,800}, \frac{1\,800}{1\,800}$, combien y en a-t-il d'irréductibles ?

On observe que $1\,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$. On doit donc éliminer toutes les écritures fractionnaires dont le numérateur est un multiple de 2, de 3 ou de 5. Il y en a – a priori − $900 + 600 + 360 = 1\,860$, résultat qui révèle l'erreur : évidemment il y a des doublons : les multiples de $6,$ de 10 et de 15 (il y en a $300 + 180 + 120 = 600$), ce qui ramène les réductibles à 1 260… mais dans les doublons, on a compté des « triplons », les multiples de 30, qui sont 60. Les réductibles sont donc 1 320 et il reste 480 irréductibles.