Pépinière premières - Graphes.

(Pierre Bornsztein décembre 2016)

Exercice 1. Dans une soirée, chacun des $n \geq 2$ invités a serré la main d'un certain nombre d'autres invités. Prouver que deux des invités ont serré le même nombre de mains.

Solution. Considérons le graphe (simple et non orienté) dont les sommets sont les invités et dont les arêtes représentent les poignées de mains.
Chaque sommet est donc de degré d avec $0 \leq d \leq n-1$ (on ne peut avoir $d = n$ puisque personne ne serre sa propre main). Les n degrés respectifs des n sommets sont donc n entiers compris entre 0 et $n-1$. La seule façon d'avoir n nombres différents serait que chacun des entiers de 0 à $n-1$ soit le degré d'un sommet. Or, il est impossible d'avoir simultanément un sommet de degré 0 (relié à aucun autre sommet) et un sommet de degré $n-1$ (relié à chacun des autres sommets).
Ainsi, deux des sommets ont le même degré.

Exercice 2. Prouver que lors de la soirée précédente, le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Solution. On conserve le graphe ci-dessus. La somme S de tous les degrés compte exactement chaque arête deux fois. Ainsi, le nombre S est un entier pair. Or, on a $S = S_I + S_P$, où S_I (resp. S_P désigne la somme des degrés impairs (resp. pairs). Clairement, S_P est un nombre pair, d'où S_I est un nombre pair. Puisque S_I est une somme de nombres impairs, c'est que cette somme comporte un nombre pair de termes.

Exercice 3. Soit $n \geq 3$ le nombre de personnes présentes lors de la soirée. On suppose qu'au total, il y a eu au moins n poignées de mains échangées. Prouver qu'on peut trouver des personnes $p_1, \cdots, p_k$, avec $k \geq 3$, telles que p_1 a serré la main de p_2, p_2 a serré la main de p_3, ..., et p_k a serré la main de p_1.

Solution. On conserve le graphe ci-dessus. On va raisonner par récurrence sur n.

Pour $n = 3$, il y a donc trois sommets, disons A, B, C, et trois arêtes. Ainsi, chaque paire de sommets correspond à une arête et A, B, C fournit le cycle cherché.

Soit $n \geq 3$ un entier fixé, et supposons le résultat établi pour tout graphe simple et non orienté de n sommets et n arêtes.
On considère maintenant un graphe (simple et non orienté) de $n+1$ sommets et $n+1$ arêtes.
S'il existe un sommet de degré 0, on l'élimine ainsi qu'une arête arbitraire. Le graphe résultant possède alors n sommetes et n arêtes, et l'hypothèse de récurrence assure alors de l'existence d'un cycle dans ce graphe. Ce cycle est évidemment un cycle dans le graphe initial.
S'il existe un sommet de degré 1, on l'élimine ainsi que l'arête dont il est une extrémité. Le graphe résultant possède alors n sommetes et n arêtes, et on conclut comme ci-dessus.
Si chaque sommet est de degré au moins 2 (en fait, puisque la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes, il est facile de vérifier que chaque sommet est alors de degré 2), on choisit un sommet arbitraire, disons A_0. En utilisant une arête d'extrémité A_0, on atteint un sommet A_1. On élimine momentanément l'arête utilisée. Puisque A_1 est de degré au moins 2, on peut utiliser une autre arête d'extrémité A_1, qui nous emmène au sommet A_2. On élimine l'arête entre A_1 et A_2. Comme ci-dessus, il reste au moins une arête d'extrémité A_2, que l'on utilise pour atteindre un sommet A_3, et ainsi de suite... Tant qu'on tombe sur un nouveau sommet, il est toujours possible d'en atteindre un autre. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sommets, il arrivera forcément un moment où l'on va retomber sur un sommet déjà rencontré, ce qui fournit le cycle désiré.

Exercice 4. On considère un graphe simple non orienté à n sommets, deux quelconques toujours reliés par une arête. Chaque arête est coloré d'une couleur parmi n possibles, et chaque couleur est utilisée au moins une fois.
Prouver qu'il existe trois sommets reliés deux à deux par trois arêtes de trois couleurs différentes.

Solution. On ne conserve qu'une arête de chaque couleur. Cela nous fournit un graphe à n sommets et n arêtes et, d'après l'exercice précédent, il existe un cycle dans ce nouveau graphe. Cela assure de l'existence d'un cycle dont les arêtes sont toutes de couleurs différentes dans le graphe initial. Appelons un tel cycle un *arc-en-ciel.*

Puisque notre graphe initial contient au moins un arc-en-ciel, on peut en considérer un de longueur minimale, disons $A_1A_2\cdots A_kA_1$, avec $k \geq 3$. L'objectif est de prouver que $k = 3$.
Par l'absurde : supposons que $k > 3$.
On considère l'arête A_1A_3, qui est une corde dans notre arc-en-ciel, et appelons c sa couleur. Puisque chaque couleur n'est utilisée qu'au plus une fois dans notre arc-en-ciel, l'un des deux chemins $A_1A_2A_3$ et $A_3\cdots A_kA_1$ ne contient pas d'arête de couleur c, ainsi l'un des cycles $A_1A_2A_3A_1$ ou $A_1A_3\cdots A_kA_1$ est un arc-en-ciel, mais de longueur strictement plus petite que celle de notre arc-en-ciel minimal. Cela fournit la contradiction désirée.

Exercice 5. Dans un pays, se trouvent n villes reliées deux à deux par des routes, jamais plus d'une seule route entre deux villes. Ces routes ne se croisent pas, certaines passant si nécessaire au-dessus d'autres à l'aide de ponts. Chaque route est à sens unique.
Hélàs, des responsables du Ministère du Sens de la Circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on sort d'une ville quelconque, il sera impossible d'y revenir.
Un tel réseau de routes entre les n villes est dit *catastrophique*.
a) Prouver que, dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.
b) Prouver que, dans tout réseau catastrophique, il y a une ville depuis laquelle on peut atteindre directement chacune des autres villes.
c) Combien, au minimum, faut-il changer de sens de circulation pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (éventuellement en plusieurs étapes) dans le nouveau réseau routier obtenu?

Solution. a) Considérons le graphe simple et orienté dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les routes en respectant les orientations de celles-ci.
a) Parmi toutes les villes, on en considère une, disons A, de laquelle part le minimum de routes. On note m ce minimum.
Nous allons prouver qu'on ne peut sortir de A (soit donc que $m = 0$).

Par l'absurde : supposons qu'il existe une route qui parte de A, disons vers la ville B. Il y a n villes en tout, dont m peuvent être atteintes directement depuis A. Compte-tenu de A, il y a donc $n - 1 - m$ villes qui sont reliées à A par une route qui arrive en A, et aucune d'elles n'est donc B. Clairement, on a $m < n-1$ sinon on aurait $m = n-1$, en contradiction avec la minimalité de m. Afin d'éviter l'existence d'un cycle, chacune des $n-1-m$ villes ci-dessus est alors reliée à B par une route qui arrive en B. Par conséquent, en n'oubliant pas que la route entre A et B va de A vers B, le nombre de routes qui partent de B ne peut dépasser $n-1-(n-1-m)-1 = m-1$. On en déduit qu'il part moins de routes de B qu'il n'en part de A, en contradiction avec la minimalité de m.

b) Le raisonnement est le même qu'au a), mais en considérant la ville dont part le maximum de routes.

c) Il faut bien entendu changer au moins un sens de circulation...
Appelons A la ville dont on ne peut pas sortir, et B celle depuis laquelle on peut atteindre directement chacune des autres villes. La route qui relie A et B est donc orientée de B vers A. On décide de l'orienter de A vers B.
Soit X une ville, autre que A et B. Alors, $ABXA$ est un cycle et, parmi ces trois villes, on peut passer de n'importe laquelle à n'importe quelle autre.
Soit X et Y deux villes, autres que A et B. Alors, on peut passer de X à Y (et réciproquement) en allant d'abord en A puis en B.
Ainsi, en ne changeant qu'un seul sens de circulation, mais bien choisi, on peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre.

Exercice 6. Dans un pays, se trouvent au moins 101 villes, et des liaisons aériennes directes (aller-retour) existent entre certaines d'entre elles. La capitale est ainsi reliée à 100 villes, et chaque autre ville que la capitale possède exactement 10 liaisons aériennes. Il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre en utilisant les liaisons aériennes, éventuellement en plusieurs étapes.
Prouver qu'il est possible de fermer la moitié des liaisons aériennes de la capitale tout en préservant la capacité de voyager d'une ville à l'autre.

Solution. Soit G le graphe simple et non orienté dont les sommets sont les villes et dont les arêtes représentent les liaisons aériennes.
Soit G' le graphe obtenu en éliminant la capitale C et toutes les arêtes dont elle est une extrémité. Par hypothèse G est connexe, mais G' ne l'est pas forcément. Quoi qu'il en soit, chaque composante connexe de G' contient au moins un sommet adjacent à C dans G. Dans G', chacun de ces sommets est de degré 9, et tous les autres sont de degrés 10. Mais, chaque composante connexe, vue comme un graphe à elle seule, doit possèder un nombre pair de

sommets de degrés impairs. Cela assure qu'au moins deux sommets sont de degrés impairs dans chaque composante, soit donc de l'existence dans chaque composante d'au moins deux sommets reliés à C dans G. Comme C est de degré 100 dans G, il n'y a donc pas plus de 50 composantes connexes dans G'. On peut alors rétablir la connexité en restorant C et une seule arête pour chaque composante. Cela revient à conserver la connexité initiale en éliminant au moins 50 arêtes.

Exercice 7. Dans chaque case d'un tableau 10×10, on a écrit un et un seul chiffre. Chacun des chiffres $0, 1, \cdots, 9$ est écrit 10 fois.
Prouver qu'il existe une ligne ou une colonne qui contient plus de trois chiffres différents.

Solution. On construit un graphe bipartite dont les deux ensembles de sommets indépendants sont X et Y, où X est un ensemble de 10 sommets représentant les 10 nombres, et Y est un ensemble de 20 sommets représentant les 10 lignes et les 10 colonnes. Une arête joint le sommet $x \in X$ au sommet $y \in Y$ si et seulement si le nombre x est écrit dans la ligne ou colonne y.
Il s'agit alors de prouver qu'un sommet $y \in Y$ est de degré au moins 4. Pour cela, il suffit de prouver qu'il existe au moins 61 arêtes, le principe des tiroirs permettant alors de conclure.
La clé est de remarquer que chaque $x \in X$ est de degré au moins 7. En effet, pour $x \in X$, notons respectivement $l(x)$ et $c(x)$ le nombre de lignes et le nombre de colonnes quisont reliées à x. Alors, le tableau formé par l'intersection des $l(x)$ lignes et $c(x)$ colonnes concernées est un tableau de taille $c(x)l(x)$, qui doit contenir les 10 apparitions de x.
Ainsi, on a $l(x)c(x) \geq 10$, avec $l(x), c(x) \geq 1$ et entiers. Il est facile de vérifier qu'alors $l(x) + c(x) \geq 7$, ce qui signifie bien que x est de degré au moins 7.