Partie académique : éléments de solution

Exercice 4

Mollusques

Parie A. Étude de cas

1.

Effectif	75	67	59	52	45	39	33	28	23	19	15	12	9	6	4	2	1
Pièces données	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4	3	3	3	2	2	1	1
Reste	67	59	52	45	39	33	28	23	19	15	12	9	6	4	2	1	0

Il a fallu 17 dons pour que la collection soit entièrement transmise (on n'a pas dit que la règle peut changer lorsque les choses deviennent plus facilement maîtrisables…)

2. *a.* Si l'effectif est n^2, le nombre de coquillages à transmettre est n et l'effectif restant est $n^2 - n$.

b. Le plus grand carré inférieur ou égal à $n^2 - n$ est $(n-1)^2$, car $n^2 - n - (n-1)^2 = n - 1$, ce qui prouve que $n^2 - n \geq (n-1)^2$, et comme le carré suivant est n^2 lui-même…

Océane donne donc cette fois $(n-1)$ coquillages, et il en reste $n^2 - n - (n-1) = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$

3. On vient de voir que, partant d'un effectif carré, les deux dons suivants sont identiques. Voyons s'il est possible que trois dons successifs soient identiques. La méthode choisie suppose que n^2 soit le plus grand carré inférieur ou égal à $n^2 + 2n$, car $n^2 \leq n^2 + n \leq n^2 + 2n < (n+1)^2$

Partie B. Livre de bord

1. *a.* Après le 27ème don, l'effectif restant est inférieur à 1 000. Ce n'est pas un carré, puisque le suivant en est un pour la douzième fois. Or, les carrés parfaits apparaissent, après une première fois, une fois sur deux (voir ci-dessus). Donc l'effectif après le 28ème don est le plus grand carré inférieur à 1 000, c'est-à-dire 961 ou encore 31^2. Les effectifs précédents étaient 32^2 puis $32^2 - 32 = 992$.

b. Remontons la liste des carrés parfaits :

Numéro de la transaction	28	26	24	22	20	18	16	14	12
Effectif après coup	961	1 024	1 089	1 156	1 225	1 296	1 369	1 444	1 521
Numéro de la transaction	10	8	6	5	4	3	2	1	0
Effectif après coup	1 600	1 681	1 764	1 806	1 848	1 891	1 934	1 978	2 022

La première fois que l'effectif de la collection, amputée d'un don, fut un carré parfait, cet effectif était 1 764 c'est-à-dire 42^2. L'effectif précédent peut être 1 806 et l'effectif précédent 1 848, et auparavant, il y a deux dons de 43 coquillages et deux de 44, ce qui conduit à un effectif initial de 2 022 coquillages.. On a « sauté » les carrés de 43 et de 44.

2. Après 28 dons l'effectif de la collection est 961, et chaque carré donne naissance à deux étapes, sauf le dernier, 1. Il reste donc 61 transmissions. Au total 89 dons sont nécessaires.

Exercice 5

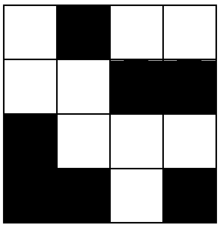
Clair de nombres

1. ***a.*** La condition appliquée à l'ensemble $\{a, b\}$ exige que b ne soit pas multiple de a et que a ne soit pas multiple de b.
b. 3 ne divise ni 4, ni 10, ni $4 + 10$, 4 ne divise ni 3, ni 10, ni $3 + 10$ et 10 ne divise ni 3, ni 4, ni $3 + 4$. L'ensemble est clair.

c. Le nombre 2 022 est un diviseur de la somme $2\,021 + 2\,023 = 4\,044$. L'ensemble n'est pas clair.
2. L'ensemble $\{4, 5, 6\}$ n'est pas clair, puisque 5 divise $4 + 6 = 10$. $\{4, 5,7\}$ non plus, puisque 4 divise $5 + 7 = 12$. On élimine également $\{4, 5, 8\}$ $(8 = 2 \times 4)$, $\{4,5,9\}$ $(4 + 5 = 9)$, $\{4, 5, 10\}$ $(10 = 2 \times 5)$, $\{4, 5, 11\}$ $(11 + 5 = 4 \times 4)$, $\{4,5,12\}$ $(12 = 3 \times 4)$ et on parvient à $\{4, 5, 13\}$, 4 ne divise ni 5, ni 13, ni 18, 5 ne divise ni 4, ni 13, ni 17 et 13 ne divise ni 4, ni 5, ni 9. Le nombre cherché est donc 13.
3. Appelons x le quatrième élément de l'ensemble. Il est certain que 3 divise $x, x + 1$ ou $x + 2$. Comme $4 + x = 3 + (x + 1)$ et $10 + 4 + x = 12 + (x + 2)$, on a décomposé $4 + x$ et $10 + 4 + x$ en sommes de deux multiples de 3. L'ensemble constitué n'est pas clair.
4. ***a.*** Si l'ensemble $\{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda\, a_3, \dots, \lambda\, a_n\}$ n'est pas clair, alors il existe un choix d'un nombre a_i et de nombres $a_k, a_l, \dots, a_m, a_p$ tels que $\lambda(a_k + a_l + \cdots + a_m + a_p)$ soit un multiple de λa_i.
Mais l'égalité $\lambda\left(a_k + a_l + \cdots + a_m + a_p\right) = b\lambda a_i$ entraîne l'égalité $\left(a_k + a_l + \cdots + a_m + a_p\right) = ba_i$ et donc le fait que l'ensemble $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ n'est pas clair. La réciproque utilise exactement les mêmes arguments.
b. L'exemple de la question **3.** montre qu'on ne peut espérer dans tous les cas obtenir un ensemble clair en adjoignant un élément à un ensemble clair. La question **4.** ***a.*** montre qu'on peut au moins obtenir à partir d'un ensemble clair à n éléments un autre ensemble clair à n éléments « plus grands ».
Supposons que $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ soit un ensemble clair. Alors $F = \{2a_1, 2a_2, 2\,a_3, \dots, 2a_n\}$ est lui aussi clair Le nombre $b = 2a_1 + 2a_2 + 2\,a_3 + \ \dots + 2a_n + 1$ n'appartient pas à F et n'est diviseur d'aucune somme d'éléments de F, puisqu'il est supérieur à toutes ces sommes. Par ailleurs, aucun des éléments de F, aucune somme d'éléments de F (nécessairement pair et paire) ne divise b (impair). L'ensemble $G = F \cup \{b\}$ est donc clair.
c. La question précédente montre une possibilité de passer d'un ensemble clair à n éléments à un ensemble clair à $n + 1$ éléments. On connaît un ensemble clair à 2 éléments, $\{2, 3\}$. D'où le résultat.
5. ***a.*** Considérons les n sommes $s_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + x_n$. On a n entiers tous différents, donc au moins deux ont le même reste dans la division euclidienne par n. Mettons s_i et s_j. Si, par exemple, $j > i$ la différence $s_j - s_i = s_{1+1} + s_{1+2} + \cdots + s_{j-1} + s_j$. Donc l'ensemble des$x_i$ n'est pas clair.
b. Si un ensemble d'entiers a pour élément l'entier n, on peut lui adjoindre $n - 1$ autres éléments pour créer une partie à n éléments qui, en tant qu'ensemble isolé, n'est pas un ensemble clair. Mais cette obscurité s'étend à l'ensemble entier… Il n'y a donc que des ensembles finis parmi les ensembles clairs.

Exercice 6

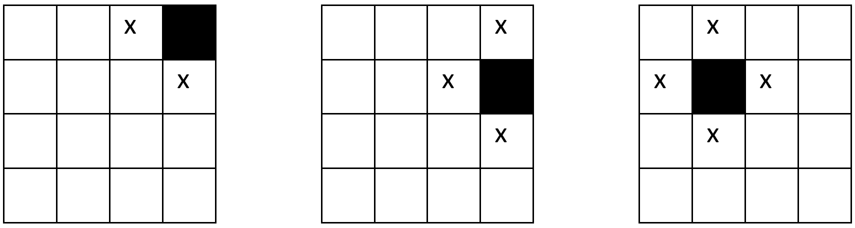
Homogénéité



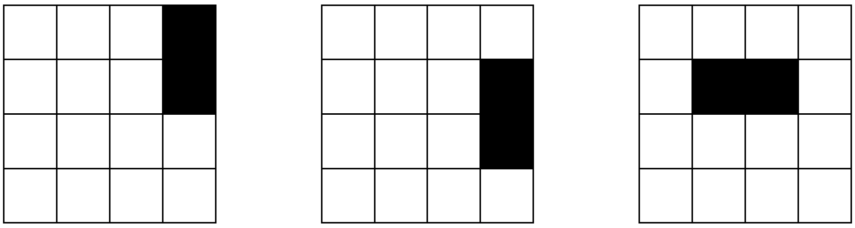
1. Le total sur la première ligne est -1, sur la deuxième ligne 1, sur la troisième ligne 1, sur la quatrième -1, sur la première colonne 1, sur la deuxième -1, sur la troisième -1 et sur la quatrième -3. Au total, l'homogénéité mesurée est -4.

2. Si les 16 cases sont de la même couleur, l'homogénéité mesurée est 24. On ne peut pas faire mieux, car il y a exactement 24 « frontières » (3 par ligne, 3 par colonne). L'homogénéité la plus faible est celle pour laquelle on marque -1 à chaque frontière. Le tableau est composé de cases alternativement blanches et noires, comme un damier.

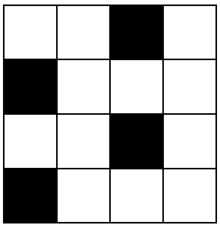
3.



Si un tableau contient une seule case noire, celle-ci possède deux, trois ou quatre voisines. L'homogénéité mesurée est 20 dans le premier cas, 18 dans le deuxième et 16 dans le troisième.



4.
L'homogénéité mesurée est 18 pour le tableau de gauche, 16 pour celui du milieu, 14 pour celui de droite. La réponse est donc oui, mais un tableau dans lequel les deux cases noires ne seraient pas voisines perdrait en homogénéité.



5. Ce tableau a pour homogénéité 0.