Éléments de solution Asie

Supercarrés

1. Liste des carrés des entiers de 1 à 20 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	121	144	169	194	225	256	289	324	361	400

2. ***a.*** 7 est impair, $7 < 24$ et $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$ et $625 = 25^2$.
b. 3 est impair, $3 < 4$ et $3^2 + 4^2 = 5^2$ donc $(3,4)$ est bien un supercarré d'ordre 2. Si $(3, n)$est un supercarré d'ordre 2, alors $n > 3$. Posons $9 + n^2 = p^2$. On a alors $9 = (p - n)(p + n)$, ce qui conduit à $p = n + 1$ et $2n + 1 = 9$, et donc à $p = 5$ et $n = 4$.
c. Si $(5, a)$ est un supercarré d'ordre 2, alors $a > 5$ et $25 + a^2$ est un carré parfait. La liste ci-dessus nous fournit une solution $a = 12$. Si $25 + a^2 = p^2$, alors $(p - a)(p + a) = 25$, ce qui conduit à $p = a + 1$ et $2a + 1 = 25$, c'est-à-dire $a = 12$.
Si $(13, b)$ est un supercarré d'ordre 2, alors $b > 13$ et $169 + b^2$ est un carré, que nous appelons m^2.
De $(m - b)(m + b) = 169$ on déduit comme précédemment que $m = b + 1$ et $2b + 1 = 169$ (en effet, les seuls produits d'entiers égaux à 169 sont 1×169 et 13×13). Ce qui conduit à $b = 84$.
d. Dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit. Dans le cas où ces trois longueurs sont entières, on parle de *triplets pythagoriciens.*

3. $(5,12,84)$ vérifie les conditions imposées : il y a trois termes, le premier est impair, $5 < 13 < 84$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, vu précédemment, et $5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$, vu précédemment.
4. Un supercarré d'ordre 5 commençant par 3 contient pour commencer un supercarré d'ordre 2 commençant par 3, le seul possible est $(3, 4)$, puis un supercarré d'ordre 3 commençant par $(3, 4)$. On en a vu un en passant, $(3, 4, 12)$. On peut le faire suivre par $(3, 4, 12, 84)$. La somme des carrés de ces quatre nombres est 85^2. En observant que $85 = 5 \times 17$, on cherche un triplet pythagoricien commençant par 5. On a trouvé précédemment $(5, 12, 13)$ et donc $(5 \times 17)^2 + (12 \times 17)^2 = (13 \times 17)^2$. On complète notre liste par $12 \times 17 = 204$ et on obtient un supercarré d'ordre 5 : $(3,4,12,84, 204)$. On peut vérifier que : $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + 204^2 = 221^2$
En reprenant la méthode de la question 2c, on peut aussi chercher n et p tels que $84^2 + n^2 = p^2$ en choisissant $p = n + 1$ et $2n + 1 = 84^2 + 1$ ce qui donne $n = 3\,612$ et $p = 3\,613$.
5. On peut chercher un triplet (x_1 , x_2 , x_3) en s'inspirant de la question précédente car $48\,985^2 - 48\,984^2 = 313^2$ et $313^2 - 312^2 = 625 = 25^2 = 7^2 + 24^2$ donc $(7,24, 312, 48\,984)$ est un supercarré.

Alternances

1. ***a.*** Chacun des deux sous-ensembles proposés contient 250 paires d'entiers de somme 1 001.

b. On calcule la somme des entiers compris entre 1 et 700 : $S_{700} = \frac{700 \times 701}{2} = 245\ 350$. Chacun des deux sous-ensembles à construire doit voir la somme de ses éléments égale à 250 250. Pour réaliser les 4 900 manquants, on peut adjoindre à $\{1, 2, 3, \ldots\ldots, 698, 699, 700\}$ les nombres $1\ 000, 999, 998, 997, 906$.

2. Observation préalable : deux alternances successives sont toujours de sens contraire (passage de A vers B puis de B vers A) ?
Ainsi si on note N le nombre d'alternances :
Si N pair, on a N/2 alternances de chaque sorte
Si N impair, on a (N-1)/2 d'une sorte et (N+1)/2 de l'autre
a. Examinons les diverses situations pour les sous-ensembles A et B et les possibilités d'action (pour obtenir l'ensemble des situations possibles, intervertir les rôles de A et B) :

Composition de A	Composition de B	Action possible
Entiers de somme S Entiers a, b, c, d	Entiers de somme S Entiers $a+1, b+1, c-1, d-1$	Ôter a et d de A Ôter $a+1$ et $d-1$ de B
Entiers de somme S Entiers a, b, c, d	Entiers de somme $S-2$ Entiers $a+1, b+1, c+1, d-1$	Ôter a et d de A Ôter $a+1$ et $d-1$ de B On peut remarquer que cette configuration conduit à au minimum 5 alternances.
Entiers de somme S Entiers a, b, c, d	Entiers de somme $S-4$ Entiers $a+1, b+1, c+1, d+1$	Il existe dans B un élément x tel que $x+1$ appartienne à A (*). Ôter a et $x+1$ de A, $a+1$ et x de B. On peut remarquer que cette configuration conduit à au minimum 7 alternances.

(*) Il existe nécessairement une alternance dans l'autre sens, un élément de B ayant pour successeur un élément de A. Sinon, seul le plus petit de a, b, c, d pourrait avoir un successeur dans B.

b. Examinons les diverses situations pour les sous-ensembles A et B et les possibilités d'action (pour obtenir l'ensemble des situations possibles, intervertir les rôles de A et B) :

Composition de A	Composition de B	Action possible
Entiers de somme S Entiers a, b, c	Entiers de somme $S-1$ Entiers $a+1, b+1, c-1$	Ôter a et c de A Ôter $a+1$ et $c-1$ de B
Entiers de somme S Entiers a, b, c	Entiers de somme $S-3$ Entiers $a+1, b+1, c+1$	Même action qu'en **2.** ***a.*** avec le même argument (*)

Observons que ce cas ne peut se produire car il conduit à 5 alternances car si on suppose $a < b < c$ on en déduit que $a < a+1 < b < b+1 < c < c+1$, chaque changement de couleur indique qu'il y a un changement d'ensemble donc l'existence d'une alternance.

Le schéma de 3 alternances donne si on suppose la première alternance de A vers B :
éléments de A, éléments de B, éléments de A , éléments de B
donc si dans A on a : $a < b < c$ alors dans B, on a : $a+1 < b-1 < c+1$

Remarque : si on pense à utiliser un axe pour matérialiser qu'on est dans A ou dans B, alors on voit tout bien et beaucoup plus facilement
Voilà ce que cela donne pour exactement 4 alternances :

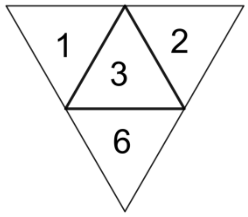
c. Comme précédemment, deux alternances de sens contraire se compensent, et deux alternances – les seules – de même sens ne peuvent se produire.

d. Le cas où on ne rencontrerait qu'une seule alternance est celui où il existerait un entier p tel que tous les entiers inférieurs ou égaux à p seraient dans le même sous-ensemble et tous les entiers supérieur à p seraient dans l'autre. Ce qui est possible si l'équation $\frac{p(p+1)}{2} = \frac{1\,000 \times 1\,001}{4}$ a des solutions entières, ce qui n'est pas le cas.

3. Les deux sous-ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ et $B = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ ont des « sommes » identiques, 105. Comme les éléments de A sont tous inférieurs strictement aux éléments de B, toute somme réalisée avec deux éléments de A est inférieure à toute somme réalisée avec deux éléments de B.

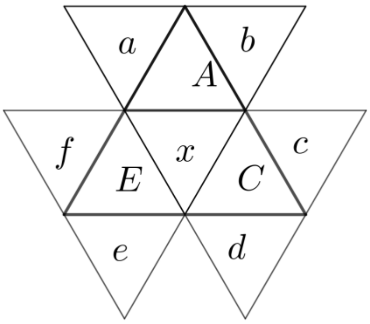
N.B. Une telle circonstance peut se produire si des entiers p et q ($p < q$) sont tels que :
$\frac{p(p+1)}{2} = \frac{q(q+1)}{4}$. Elle se produit par exemple si $p = 2$ et $q = 3$, mais alors l'un des deux sous-ensembles n'a qu'un élément, on ne peut lui en ôter 2.

Triangles de Dirichlet



1. La moyenne arithmétique de 1, 2 et 6 est 3.

2. ***a.*** Nommons les nombres contenus dans les petits triangles comme sur la figure ci-dessous



Le caractère magique du triangle impose les conditions suivantes :

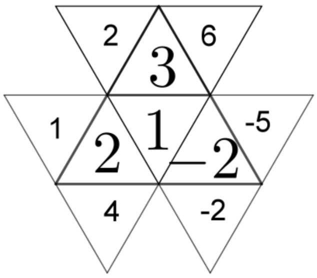
$$\begin{cases} 3A = a + b + x \\ 3C = c + d + x \\ 3E = e + f + x \end{cases}$$

Et $9x = 3A + 3C + 3E = a + b + c + d + e + f + 3x$

D'où le résultat.

b. On commencera par déterminer le contenu du triangle central, ce nombre est la moyenne des six nombres « extérieurs » puis on déterminera les contenus des triangles intérieurs autres que le triangle central en calculant les moyennes, par exemple $A = \frac{1}{3}(a + b + x)$. La solution est unique, il n'y a que des calculs directs.

c. Voici la figure complétée



3. Il s'agit simplement de rappeler que la moyenne de la somme de deux suites ayant le même nombre de termes est la somme de leurs moyennes (c'est la *linéarité de la moyenne arithmétique*)