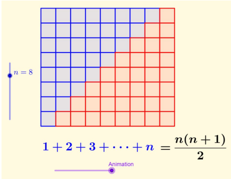
Scénario pédagogique



Thème : **Somme des premiers entiers consécutifs**
Ressource GeoGebra :
[1+2+3+...+n. Preuve visuelle de la formule.]

On introduit le sujet.
« Pour tout entier n non nul, $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, il y a un moyen simple d'en avoir une « preuve visuelle » ou une image mentale, c'est de regarder cela comme un rectangle coupé en deux selon sa diagonale. »

On prépare le fichier avec $n=8$ (ou moins ?) et on partage son écran.
« Combien voit-on de petits carrés ? En les dénombrant de bas en haut, j'en compte 1+2+3+4. Cette figure nous donne une représentation de la somme des quatre premiers entiers consécutifs. »
On déplace sa souris en dénombrant 1 puis 2, …

Avec le curseur Animation, on ajoute 5, puis 6, … jusqu'à 8 puisque n est fixé à 8.
« J'ajoute 5, puis 6, puis 7 et 8 encore. J'ai donc à l'écran la somme des entiers de 1 à 8. Regardant cette figure dans son ensemble, qu'est-ce que j'observe ? Un « demi rectangle » en quelque sorte, non ? Ou un « triangle rectangle » presque isocèle puisque chaque côté « contient 8 petits carrés».

On poursuit l'animation (avec le curseur), jusqu'à faire apparaître le rectangle, d'abord sans la formule puis avec la formule.
« Si l'on duplique cette figure et qu'on la déplace par symétrie centrale ou rotation autour d'un « centre » que l'on peut imaginer, on observe qu'elle vient compléter la première pour former un rectangle. En effet, ce n'est pas tout à fait un carré puisqu'il y a un petit carré rouge en plus sur un côté qui contient huit carrés bleus.
On a donc sous les yeux la représentation du double de la somme des entiers de un à huit. Et si on les compte (longueur fois largeur), il y en a 8 fois 9 soit 8 fois 8+1 »

On fait varier le curseur n pour généraliser.
« Et si on fait varier n, si on augmente le nombre d'entiers, 9 puis 10, on observe, que :
le double de la somme des entiers de 1 à 9 vaut 9 fois 9+1,
le double de la somme des entiers de 1 à 10 vaut 10 fois 10+1,
et plus généralement, le double de la somme des entiers de 1 à n vaut …, c'est-à-dire que…»

Intention pédagogique :
Cette visualisation peut ensuite servir d'appui pour la preuve algébrique classique où l'on écrit la somme 1+2+3+...+(n-1)+n dans les deux sens et où l'on somme terme à terme :

$$\begin{array}{l}
1 \;+\; 2 \;+\; 3 \;+ \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1) + \; n \\
n \;+ (n-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \; 3 \;+\; 2 \;+\; 1 \\
\hline
(n+1)+(n+1)+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n+1)+(n+1)
\end{array}$$

Cette somme terme à terme qui vaut à chaque fois (n+1), n fois, correspond exactement au comptage des carrés bleus et rouges dans chacune des (n+1) colonnes et n lignes de la figure finale.
On peut faire remarquer aussi que les nombres 1, 3, 6, 10,... qui sont la somme des premiers entiers naturels sont appelés *nombres triangulaires*, justement au regard de la figure présentée ici.