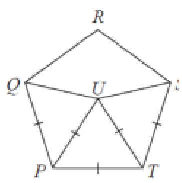
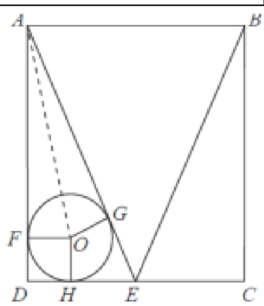
Éléments de solutions pour les questions du quiz

N°	Arguments	Conclusion
1	$1\,184 = 2^5 \times 37$. Les diviseurs de 1 184 sont donc 1, 2, 4, 8 , 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592 et 1 184. Leur somme vaut 2 394.	**2 394**
2	$2x^2 + 8y = 26$ soit $x^2 + 4y = 13$. Comme $4y$ est pair et 13 est impair, on en déduit que x^2 est impair d'où x est impair (raisonnement par l'absurde). Il existe donc un entier k tel que $x = 2k+1$. Alors $4y = 13 - (2k+1)^2 = 12 - 4k^2 - 4k$ Soit $y = 3 - k^2 - k$ et $x - y = k^2 + 3k - 2$. On vérifie que seule l'équation $k^2 + 3k - 2 = 26$ admet une solution entier naturel 4 et que si $k = 4$, on a bien $x^2 + 4y = 13$	**26 est la seule valeur possible**
3	$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ s'écrit $\frac{x+y}{x} - \frac{x+y}{y} = 1$ soit $1 + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} - 1 = 1$ soit $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 1$. Alors $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + 4 = 5$	$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = 5$
4	Les premiers termes de la suite sont $15, 15+3 = 18, 18+5 = 23, 23+3 = 26,\ 26 + 5 = 31$. On constate qu'en commençant par un nombre impair (15), on ajoute 8 tous les deux termes (en obtenant à chaque fois après deux étapes un nouveau nombre impair). Au bout de 50 étapes, on obtient le 51e terme en ajoutant donc $25 \times 8 = 200$ à 15, ce qui donne 215.	**Le 51e terme est 215**
5	Soit r le rayon de la canette et h sa hauteur. Sa surface totale est $2\pi r^2 + 2\pi rh$. On a donc $2\pi r^2 + 2\pi rh = 300$. Avec un rayon égal à $2r$, la surface totale triple et devient $2\pi(2r)^2 + 2\pi \times 2rh$ d'où $8\pi r^2 + 4\pi rh = 900$. Or $900 = 3 \times 300 = 3(\,2\pi r^2 + 2\pi rh) = 6\pi r^2 + 6\pi rh$. Donc $8\pi r^2 + 4\pi rh = 6\pi r^2 + 6\pi rh$ soit $\pi rh = \ \pi r^2$et $300 = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi r^2$ d'où $\pi rh = \ \pi r^2 = 75$ et si on double la hauteur, l'aire totale est $2\pi r^2 + 4\pi rh$	**L'aire totale devient 450**
6	On pose $PQ = PR = 2x$ et $QR = 2y$. Soit M le milieu de $[QR]$, comme PQR est isocèle en P, le triangle PQM est rectangle en M et $\cos\widehat{PQR} = \ \cos\widehat{PQM} = \frac{QM}{PQ} = \frac{y}{2x}$. Or on sait que $\frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\pi y^2 = 5 \times \frac{1}{2}\pi y^2$ soit $2x^2 = 4y^2$ soit, puisque x et y sont positifs $\ x = y\sqrt{2}$. Donc :	$\cos\widehat{PQR} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
7	$(3 + 2x + x^2)(m^2x^2 + mx + 1)$ $= m^2x^4 + (2m^2 + m)x^3 + (3m^2 + 2m + 1)x^2 + (3m+2)x + 3$ Le coefficient de x^2 vaut 2 s'écrit donc $3m^2 + 2m + 1 = 2$ soit $3m^2 + 2m - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont	$\boldsymbol{m = -1}$ **ou** $\boldsymbol{m = \frac{1}{3}}$.
8	$\widehat{QUS} = 360° - \left(\widehat{QUP} + \widehat{PUT} + \widehat{TUS}\right)$. Or, le pentagone $PQRST$ est régulier et le triangle PUT est équilatéral donc $QP = PT = PU$. Alors le triangle QPU est isocèle en P et $\widehat{QUP} = \widehat{UQP} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{QPU}\right)$. Les angles intérieurs d'u pentagone régulier mesurent 108° (on le démontre en considérant un des cinq triangles isocèles de sommet le centre du pentagone et de base l'un des côtés du pentagone, l'angle au sommet mesurant $\frac{360°}{5} = 72°$). Donc, comme PUT est équilatéral $\widehat{QPU} = 108° - \widehat{UPT} = 48°$ d'où $\widehat{QUP} = 66°$. De même $\widehat{TUS} = 66°$. Donc $\ \widehat{QUS} = 360° - 2 \times 66° - 60°$ 	$\widehat{QUS} = 168°$
9	On considère une coupe du cylindre, du cône et de la sphère, comme sur la figure ci-contre. La section du cylindre donne le rectangle $ABCD$, celle du cône le triangle AEB isocèle en E et celle de la sphère le cercle de centre O tangent à (AD) en F, à (AE) en G et à (DC) en H. On note r le rayon de la sphère. Alors $r = OF = OG = OH$. FDHO a trois angles droits (en F, en D et en H) et deux côtés de même longueur. C'est donc un carré et $DH = r$. 	

	E est le milieu de $[DC]$ donc $EH = 12 - r$. Les triangles OHE et OGE sont rectangles avec l'hypoténuse commune et $OG = OH$ donc ils sont isométriques et $GE = HE = 12 - r$. De même les triangles OAF et OAG sont isométriques et $AG = AF = 30 - r$. On en tire $AE = 30 - r + 12 - r = 42 - 2r$. Or, dans le triangle ADE rectangle en D, $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 30^2 + 12^2 = 1\,044$ donc $42 - 2r = \sqrt{1\,044} = 6\sqrt{29}$ soit r vaut : Solution alternative avec les aires : L'aire du triangle ADE qui est rectangle en D est $\frac{AD\times DE}{2} = \frac{30\times 12}{2} = 180$ Elle est égale à la somme des aires des triangles AOD, AOE et DOE. Chacun d'eux a pour hauteur r. L'aire de AOD est $\frac{AD\times OF}{2} = 15r$ L'aire de AOE est $\frac{AE\times OG}{2} = \frac{\sqrt{AD^2+DE^2}}{2}\ r = \frac{\sqrt{1\,044}}{2} r = 3\sqrt{29}\, r$ L'aire de DOE est $\frac{DE\times OH}{2} = 6r$ Il en résulte $\left(15 + 6 + 3\sqrt{29}\right)r = 180$ soit $r = \frac{180}{21+3\sqrt{29}} = \frac{60}{7+\sqrt{29}} = \frac{60\left(7-\sqrt{29}\right)}{49-29} = 3\left(7 - \sqrt{29}\right) = 21 - 3\sqrt{29}$	$\mathbf{21 - 3\sqrt{29}}$
10	$\frac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q} = \frac{p+\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}+q} = \frac{\frac{pq+1}{q}}{\frac{1+pq}{p}} = \frac{p(pq+1)}{q(pq+1)}$. Comme p et q sont strictement positifs $pq + 1 > 0$ et l'égalité donnée s'écrit $\frac{p}{q} = 17$ soit $p = 17q$. Comme q est un entier strictement positif, $q \geq 1$. De plus, $p + q \leq 100$ donc $18q \leq 100$ soit, puisque q est un entier, $q \leq 5$. On a donc cinq valeurs possibles pour q : 1, 2, 3, 4, 5 et cinq couples solutions :	$\mathbf{(17,1), (34,2), (51,3), (68,4),}$ **et** $\mathbf{(85,5)}$