

Pépinière académique de mathématiques décembre 2025 – solutions

Exercice 1

Si L désigne la longueur initiale du rectangle, l'aire du rectangle obtenu est $L \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \left(1 - \frac{20}{100}\right)$.

Dire qu'on obtient un rectangle d'aire égale à celle du rectangle initial revient à dire que la longueur redevient L .

On a donc à résoudre l'équation $\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 1$ soit $1 + \frac{x}{100} = \frac{10}{8}$ soit $\frac{x}{100} = \frac{2}{8}$ soit $x = 25$.

Exercice 2

On note P_i la probabilité qu'en partant de la case i , le pion soit placé sur la case 3 avant d'être placé sur 9. On cherche alors P_1 .

Par symétrie, $P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{2}$. D'autre part, $P_3 = 1, P_9 = 0$.

Si le pion est sur la case 1, il peut être placé ensuite, avec dans chaque cas une chance sur deux, sur l'une des cases 2 et 4

$$\text{donc } P_1 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_4 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}. \quad (*)$$

Si le pion est sur la case 2, il peut être placé ensuite, avec dans chaque cas une chance sur trois, sur l'une des cases 1, 3 et 5

$$\text{donc } P_2 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_3 + \frac{1}{3}P_5 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2}. \quad (**).$$

De (*) et (**), on tire $P_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{2}$ soit $\frac{5}{6}P_1 = \frac{1}{2}$ soit $P_1 = \frac{3}{5}$.

Exercice 3

Soit x l'âge actuel de Jeanne. Il y a deux son âge était $x - 2$. Dans 12 ans, son âge sera $x + 12$.

On doit donc résoudre l'équation $x + 12 = 8(x - 2)$ dont la solution est $x = 4$.

Exercice 4

Pendant les 12 premières minutes :

Margot court vers le nord à la vitesse de 12 km/h et, comme $12 = \frac{60}{5}$ elle parcourt $\frac{12}{5} = 2,4$ km

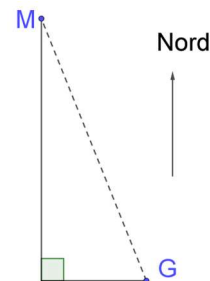
Gustave marche vers l'est et parcourt $\frac{5}{5} = 1$ km.

Ils se dirigent ensuite l'un vers l'autre. D'après le théorème de Pythagore, la distance qui les sépare est $\sqrt{2,4^2 + 1^2} = 2,6$ km.

Ils se dirigent l'un vers l'autre et la distance qui les séparent réduit à la vitesse $12+5=17$ km/h.

Le temps pour se rejoindre est donc $\frac{2,6}{17} \approx 0,153$ h soit environ $0,153 \times 60 = 9,18$ min.

Comme ils ont quitté leur collège à 15 heures et comme $12 + 9 = 21$, ils se retrouvent vers 15h21.



Exercice 5

$12 = 2^2 \times 3$, $20 = 2^2 \times 5$ donc le PPCM de 12 et 20 est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$. Un entier est divisible par 12 et par 20 s'il est divisible par 60.

Comme $60 \times 16 = 960$, $60 \times 17 = 1\,020$, $60 \times 166 = 9\,960$ et $60 \times 167 = 10\,020$, le nombre d'entiers de quatre chiffres multiples de 12 et de 20 est donc $166 - 16 = 150$.

De ces entiers, il faut maintenant exclure tous les multiples de 16. On cherche donc les multiples de 60 et de 16 c'est-à-dire les multiples du PPCM de 16 et 60.

Comme $16 = 2^4$, le PPCM de 16 et 60 est $2^4 \times 3 \times 5 = 240$.

Comme $240 \times 4 = 960$, $240 \times 5 = 1\,200$, $240 \times 41 = 9\,840$ et $240 \times 42 = 10\,080$, le nombre d'entiers à quatre chiffres multiples de 240 est $41 - 4 = 37$.

Au final, le nombre d'entiers à quatre chiffres multiples de 12 et de 20 mais pas de 16 est $150 - 37 = 113$.

Exercice 6

Dans le triangle FAD rectangle en A , $BF^2 = 16^2 + 13^2 = 425$.

Le triangle BFD est équilatéral donc $BD^2 = BF^2$ et dans le triangle BCD rectangle en C , $425 = BD^2 = 8^2 + CD^2$ d'où $CD^2 = 361$. On en déduit que $CD = \sqrt{361} = 19$.

De même, dans le triangle DFE rectangle en E , $425 = FD^2 = 5^2 + FE^2$ d'où $FE^2 = 400$. On en déduit que $FD = \sqrt{400} = 20$.

Le périmètre de l'hexagone $ABCDEF$ est donc $20 + 5 + 19 + 8 + 16 + 13 = 81$.

Exercice 7

$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$. L'entier 900 a donc six diviseurs premiers en comptant deux fois 2, 3 et 5. Les chiffres qui interviennent dans les entiers à cinq chiffres peuvent être 2, 3 et 5 mais aussi 1, $2 \times 2 = 4$, $5, 2 \times 3 = 6, 9$.

On peut donc avoir comme chiffres :

1^{er} cas : l'entier a le chiffre 1. Alors, pour les quatre autres chiffres, on ne peut avoir ni le chiffre 2 ni le chiffre 3 pour un produit de chiffres égal à 900.

Si on prend le chiffre 4, il reste les chiffres 5, 5 et 9 pour arriver au produit 900. On a donc les chiffres 1, 4, 5, 5, 9. Le nombre d'entiers distincts comportant ces chiffres est le nombre de permutations de ces chiffres divisé par 2 car on a deux fois le même chiffre (le chiffre 5) soit $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 60$

Si on prend le chiffre 5, il reste les chiffres 5, $2 \times 3 = 6$ et $2 \times 3 = 6$ pour arriver au produit 900. On a donc les chiffres 1, 5, 5, 6, 6. Le nombre d'entiers distincts comportant ces chiffres est le nombre de permutations de ces chiffres divisé par 4 car on a deux fois le chiffre 5 et deux fois le chiffre 6 soit $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4} = 30$

2^e cas : l'entier n'a pas le chiffre 1. Il peut alors avoir le chiffre 2.

S'il a le chiffre 2 une seule fois, alors les autres chiffres sont nécessairement 5, 5, 3 et 6. On a donc les chiffres 2, 5, 5, 3, 6 et le nombre d'entiers distincts est dans ce cas $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 60$.

Si l'entier a le chiffre 2 deux fois alors les autres chiffres sont nécessairement 5, 5 et 9. On a donc les chiffres 2, 2, 5, 5, 9 et le nombre d'entiers distincts est dans ce cas $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4} = 30$.

3^e cas : l'entier n'a ni le chiffre 1, ni le chiffre 2, alors les chiffres sont nécessairement 4, 3, 3, 5 et 5. On a donc les chiffres 3, 3, 4, 5, 5 et le nombre d'entiers distincts est dans ce cas $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4} = 30$.

Au total, le nombre d'entiers qui conviennent est $60 + 30 + 60 + 30 + 30 = 210$

Exercice 8

Avec les notations de la figure, le diamètre $[MN]$ coupe perpendiculairement la corde

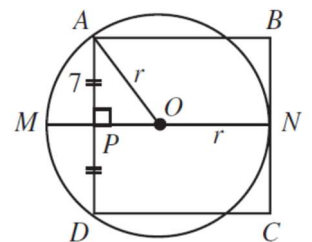
$[AD]$ en son milieu P d'où $PA = 7$. De plus $PO = PN - ON = 14 - r$

Dans le triangle AOP rectangle en P , $OA^2 = PA^2 + PO^2$ soit $r^2 = 7^2 + (14 - r)^2$

Soit $r^2 = 49 + 196 - 28r + r^2$

Soit $28r = 245$

Soit $r = 8,75$



Exercice 9

On soustrait la deuxième égalité à la première et on obtient $ab + c - a - bc = -1$

soit $(b - 1)(a - c) = -1$.

Comme a, b et c sont des entiers les seules possibilités sont $b - 1 = -1$ ou $b - 1 = 1$.

Si $b - 1 = 1$ soit $b = 2$ alors $a - c = 1$ soit $a = c + 1$ et l'égalité $ab + c = 2026$ s'écrit $2(c + 1) + c = -1$ soit $3c = 2028$ soit $c = 676$ d'où $a = 675$.

Si $b - 1 = -1$ soit $b = 0$ alors les deux égalités de départ s'écrivent $c = 2026$ et $a = 2027$.

On vérifie aisément que les triplets $(675, 2, 676)$ et $(2027, 0, 2026)$ sont bien solutions.

Exercice 10

Le diagramme comporte 27 triangles noirs. Si on divise le triangle ABC en petits triangles identiques et si on compte le nombre de ces petits triangles en partant du bas, on obtient (par rangée horizontale) :

$$(8 + 7) + (7 + 6) + (6 + 5) + (5 + 4) + (4 + 3) + (3 + 2) + (2 + 1) + 1 = 64.$$

L'aire du domaine coloré en noir est donc $\frac{27}{64}$ de l'aire du triangle ABC. Ce triangle équilatéral de côté 16 a pour hauteur $\frac{16\sqrt{3}}{2}$ (application du théorème de Pythagore dans le triangle AIC rectangle en I milieu de [BC]) et pour aire $\frac{1}{2} \times 16 \times \frac{16\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3}$.

L'aire totale de tous les triangles noirs est donc $\frac{27}{64} \times 64\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

Autre solution plus courte : il y a 27 triangles noirs équilatéraux de base 2 et hauteur $\sqrt{3}$ d'où le résultat $27\sqrt{3}$.