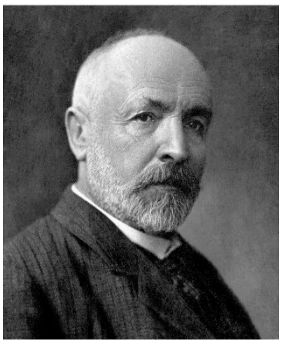
ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Lycée Marie Curie VERSAILLES



Né en 1845 à Saint Pétersbourg, Georg Cantor est un mathématicien allemand qui a étudié l'ingénierie à Zurich puis les mathématiques à Berlin. Il introduit l'étude de l'infini en acte dans les mathématiques et on lui doit la définition toujours actuelle d'*ensemble infini*. Traité de « charlatan de la science » par certains collègues, il poursuit ses recherches et dote les mathématiques d'une nouvelle façon de penser, plus libre.
Il définit les notions de *cardinal* d'un ensemble, les opérations ensemblistes de base, notamment d'*équipotence* à l'aide de bijections. Il prouve que les nombres réels sont « plus nombreux » que les nombres entiers, définit la notion d'ensemble *dénombrable* (c'est-à-dire équipotent à l'ensemble des entiers naturels) et prouve l'existence d'une infinité d'infinis.
Il est le premier à créer une théorie qui ne peut être visualisée de façon concrète changeant par là même l'essence des mathématiques qui « réside dans leur liberté » selon ses propres termes.
Confronté à la résistance des mathématiciens de son époque, il est cependant soutenu par David Hilbert qui a affirmé « Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé ».

Stage préolympique ouvert aux lycéennes et lycéens de première désigné(es) par leurs établissements, les 22 et 23 décembre 2025

La Pépinière académique de mathématiques organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Karim AKEB, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF.

Les intervenants professeurs : Dominique CLENET (lycée François Villon, LES MUREAUX), Christophe DEGUIL, lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHENIN (lycée Franco-allemand, BUC), Chloé MAROTEAUX, lycée Jules-Hardouin Mansart, SAINT CYR L'ECOLE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Julien PROUVEZE (lycée La Trinité, NEUILLY SUR SEINE)

Emploi du temps

Lundi 22 décembre 2025

	Groupe 1	*Groupe 2*
10.00	**Accueil**	
10.10 12.10	**Arithmétique CM + JP**	**Dénombrement-Probabilités DC + SD**
12.10	**Repas**	
13.00 15.00	**Dénombrement-Probabilités DC + SD**	**Arithmétique CM + JP**
15.15 16.30	**Exposé et/ou films**	

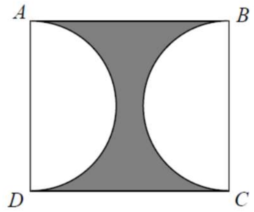
Mardi 23 décembre 2025

	Groupe 1	*Groupe 2*
10.00	**Accueil**	
10.10 12.10	**Géométrie PM**	**Equations CD**
12.10		
12.50 14.50	**Equations CD**	**Géométrie PM**
15.00 16.30	**Quiz**	**Quiz**

Géométrie

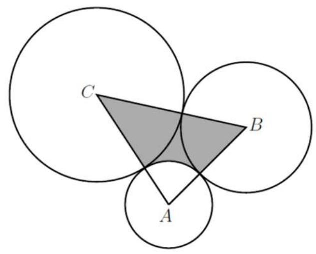
Exercice 1

Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle dont l'aire est égale à 224.
Des demi-cercles de diamètres $[AD]$ et $[BC]$ sont tracés à l'intérieur du rectangle.
On suppose que la distance la plus courte entre les demi- cercles est égale à 2.
Déterminer l'aire de la partie ombrée.



Exercice 2

On considère trois cercles de centres respectifs A, B, C et dont les rayons sont respectivement
$r_A = \sqrt{3} - 1, r_B = 3 - \sqrt{3}, r_C = \sqrt{3} + 1$.
Chacun de ces cercles est tangent extérieurement aux deux autres.
Déterminer l'aire du domaine grisé.



Exercice 3

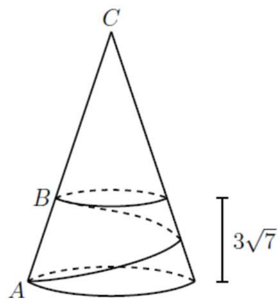
On considère quatre points B, C, D et E alignés dans cet ordre sur une droite et A un point de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par B tel que les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAE}$ ont même mesure.
On pose $BC = a, CD = b$.
Exprimer la distance DE en fonction de a et b.

Exercice 4

On considère un cône de révolution, A un point du cercle de sa base, C son sommet et B un point situé sur sa surface latérale, sur le segment $[AC]$.
On suppose que :

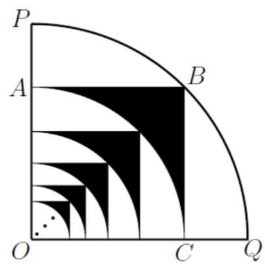
- B est à une hauteur de $3\sqrt{7}$ de la base du cône ;
- le périmètre de la base est égal à 3π ;
- la section circulaire du cône par le plan parallèle à la base et passant par B est un cercle de périmètre π.

Déterminer la longueur minimale p d'un chemin s'enroulant une fois autour du cône et allant de A à B.

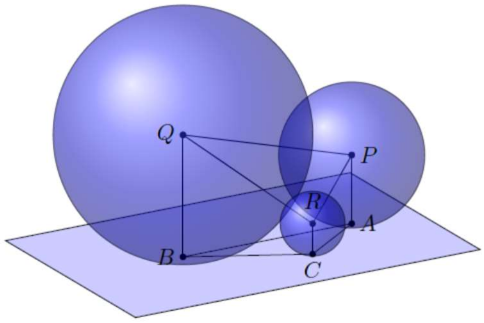


Exercice 5

Dans la figure ci-contre, on considère un quart de disque OPQ de rayon 1 dans lequel est inscrit un carré $AOCB$,le point A étant sur $[OP]$, le point B sur le quart de cercle OPQ et le point C sur $[OQ]$.
On imagine réitérer à l'infini le processus à partir de l'arc de cercle OAC en inscrivant à chaque fois un carré dans le quart de disque obtenu.
Quelle est alors l'aire totale $\mathcal{A}$ des différents domaines en noir ?

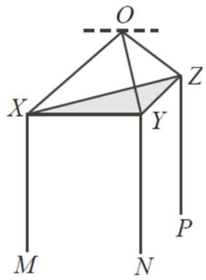


Exercice 6



Trois sphères de centres P, Q et R sont tangentes deux à deux et tangentes à un même plan $\mathcal{P}$.
Les points de contact des trois sphères avec le plan sont notés respectivement A, B et C et les rayons des sphères sont notés respectivement x, y, z.
On suppose que les côtés du triangle ABC ont pour longueurs $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.
Déterminer les longueurs x, y, z en fonction des longueurs a, b, c.

Exercice 7



Un luminaire est suspendu d'un point O au plafond comme dans la figure ci-contre.
Trois fils de 50 cm de long partent de O et passent chacun par un des sommets d'un triangle XYZ équilatéral.
On suppose que l'épaisseur de la plaque triangulaire XYZ est négligeable, que cette plaque est horizontale et que ses côtés mesurent 30 cm.
Aux extrémités M, N, P des fils sont attachées des ampoules et la distance du point O au plan horizontal MNP est de 45 cm.
Déterminer la distance du point O au plan (XYZ).

Arithmétique

Exercice 1

Déterminer les nombres premiers p, q, r tels que $p^3 + p^2 + p + 1 = qr$.

Exercice 2 – Palindrome

Un nombre entier est un nombre palindrome lorsque son écriture se lit de la même façon de la gauche la droite que de la droite vers la gauche.
Déterminer les nombres entiers palindromes de cinq chiffres qui sont des carrés parfaits et tels que le chiffre du milieu est le double du premier chiffre.

Exercice 3

Pour tout entier naturel strictement positif n, on considère les nombres entiers :
$a_1 = n^2 - 10n + 23, a_2 = n^2 - 9n + 31, a_3 = n^2 - 12n + 46$.

1. Déterminer la parité du nombre $a_1 + a_2 + a_3$.
2. Déterminer les entiers n tels que les nombres a_1, a_2, a_3 sont des entiers naturels premiers.

Exercice 4

1. Démontrer que, pour tout entier x, l'entier $x^3 - x$ est un multiple de 3.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, la différence entre le cube de la somme de n entiers naturels et la somme des cubes de ces entiers naturels est un multiple de 3.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ le nombre obtenu en écrivant à la suite tous les entiers compris entre 1 et n.
Par exemple $A(17) = 1\,234\,567\,891\,011\,121\,314\,151\,617$.
Déterminer le plus petit entier n à quatre chiffres tel que $A(n)$ est divisible par 9.

Exercice 6

On considère trois entiers x, y, z vérifiant le système $\begin{cases} 2^x + 2^y + 3^{z-1} = 2\,259 \\ 2^{x+y} + 3^z = 7\,073 \\ 2^x + 2^y + 3^z = 6\,633 \end{cases}$.
Déterminer le produit $P = xyz$.

Exercice 7

Les nombres entiers a, b et c s'écrivent, dans le système décimal, avec trois chiffres. Ces chiffres sont différents, et tous les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont utilisés.
Par ailleurs, la suite a, b, c est proportionnelle à la suite 1, 3, 5.
Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

Equations

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. On considère les deux sommes :
$A = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2\,025)$ et $B = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2\,025}\right)$.
Calculer $A + B$.

Exercice 2

On considère une fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$et telle que, pour tout réel $x \neq 0$, $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3}$.
Déterminer $f(1)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ où p, q, r, s sont des nombres réels.
On suppose que $f(1) = 59, f(2) = 118, f(3) = 177$.
Déterminer la somme $S = f(9) + f(-5)$.

Exercice 4

Pour tout nombre réel x, on note $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $E(\pi) = 3, E(-3{,}5) = -4$.
Déterminer tous les nombres réels x tels que $\frac{E(x)+1}{5} = |11 - x|$. (*)

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système d'équations $S : \begin{cases} x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois nombres réels.
On suppose que $f(a) = a^3$et $f(b) = b^3$. Déterminer *a*, *b* et *c*.

Exercice 7

Soit f une fonction telle que, pour tout réel $x \neq \frac{2}{3}$, $f(x) + f\left(\frac{x-1}{3x-2}\right) = x$. (*)
Calculer la somme $S = f(0) + f(1) + f(2)$.

Exercice 8

Déterminer le plus grand entier c pour lequel on peut trouver trois entiers x, y, z tels que
$x^2 + 4(y + z) = y^2 + 4(z + x) = z^2 + 4(x + y) = c$ et tous les réels x, y, z vérifiant ces équations sont des entiers.

Dénombrement – probabilités

Exercice 1

Sur une longue branche d'arbre, cent moineaux sont assis côte à côte. Tout d'un coup, deux de ces oiseaux quittent la branche, séparant ainsi en trois groupes les moineaux restants. On considère qu'un groupe de moineaux peut être formé d'un ou plusieurs moineaux (mais pas d'aucun).

Combien de paires différentes de moineaux ont pu quitter la branche ?

Exercice 2

Un tournoi de tennis débute avec 8 joueuses. Francesca a autant de chances de jouer contre l'une des 7 autres joueuses lors de son premier match. Si Francesca joue contre Dominique ou Estella, la probabilité que Francesca gagne est de $\frac{2}{5}$.

Si Francesca joue contre l'une des 5 autres joueuses, la probabilité qu'elle gagne est de $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité que Francesca gagne son premier match ?

Exercice 3

Un jeu compte 100 cartes numérotées de 1 à 100. Chaque carte a une face jaune et une face rouge, le même numéro paraissant sur chaque face. Jérôme place toutes les cartes sur une table, de manière à montrer les faces rouges. Il retourne d'abord chaque carte portant un nombre divisible par 2. En examinant ensuite toutes les cartes, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3.

Combien de cartes montrent une face rouge à la fin ?

Exercice 4

Lucie, Maxime et Elodie répondent à un test indépendamment les uns des autres.

La probabilité que Lucie réussisse le test et que Maxime échoue est de $\frac{3}{20}$. La probabilité que Maxime réussisse et que Elodie échoue est de $\frac{1}{4}$. La probabilité que Lucie et Elodie réussissent tous les deux est de $\frac{2}{5}$.

Déterminer la probabilité qu'au moins une personne parmi Lucie, Maxime et Elodie échoue au test.

Exercice 5

Un nombre de *Katende* est un entier strictement positif à quatre chiffres dont les deux premiers chiffres et les deux derniers chiffres, dans l'ordre, forment deux entiers qui sont des multiples consécutifs croissants d'un certain entier strictement positif. Par exemple, 2 025 est un nombre de Katende car $20 = 4 \times 5$, $25 = 5 \times 5$.

Combien y a-t-il de nombres de Katende supérieurs à 2400 et inférieurs à 2600 ?

Exercice 6

Déterminer le nombre d'entiers N compris strictement entre 1 et 100 000 dont le produit des chiffres est égal à 200.

Exercice 7

On demande à des étudiants de placer les points A, B, C et D dans le premier quadrant d'un repère orthonormal d'origine O, de sorte que A soit sur l'axe des abscisses, B sur l'axe des ordonnées, C ait même abscisse que A, D soit sur le segment [OA]. On demande que les longueurs OD, OA, AC, CB, BO soient entières (et non nulles), que le périmètre du quadrilatère OACB soit 32 et que la somme des aires des triangles BOD et DAC soit égale à l'aire du triangle BDC. Les étudiants fournissent toutes les réponses possibles, et deux quelconques n'ont pas donné la même réponse.

Combien y a-t-il d'étudiants ?