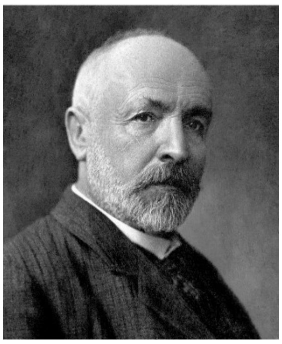
ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Lycée Marie Curie VERSAILLES



Né en 1845 à Saint Pétersbourg, Georg Cantor est un mathématicien allemand qui a étudié l'ingénierie à Zurich puis les mathématiques à Berlin. Il introduit l'étude de l'infini en acte dans les mathématiques et on lui doit la définition toujours actuelle d'*ensemble infini*. Traité de « charlatan de la science » par certains collègues, il poursuit ses recherches et dote les mathématiques d'une nouvelle façon de penser, plus libre.
Il définit les notions de *cardinal* d'un ensemble, les opérations ensemblistes de base, notamment d'*équipotence* à l'aide de bijections. Il prouve que les nombres réels sont « plus nombreux » que les nombres entiers, définit la notion d'ensemble *dénombrable* (c'est-à-dire équipotent à l'ensemble des entiers naturels) et prouve l'existence d'une infinité d'infinis.
Il est le premier à créer une théorie qui ne peut être visualisée de façon concrète changeant par là même l'essence des mathématiques qui « réside dans leur liberté » selon ses propres termes.
Confronté à la résistance des mathématiciens de son époque, il est cependant soutenu par David Hilbert qui a affirmé « Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé ».

Stage préolympique ouvert aux lycéennes et lycéens de première désigné(es) par leurs établissements, les 22 et 23 décembre 2025

La Pépinière académique de mathématiques organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Karim AKEB, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF.

Les intervenants professeurs : Dominique CLENET (lycée François Villon, LES MUREAUX), Christophe DEGUIL, lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHENIN (lycée Franco-allemand, BUC), Chloé MAROTEAUX, lycée Jules-Hardouin Mansart, SAINT CYR L'ECOLE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Julien PROUVEZE (lycée La Trinité, NEUILLY SUR SEINE)

Emploi du temps

Lundi 22 décembre 2025

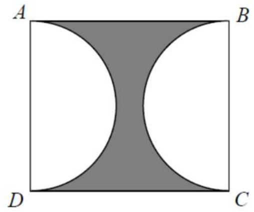
	Groupe 1	*Groupe 2*
10.00	**Accueil**	
10.10 12.10	**Arithmétique CM + JP**	**Dénombrement-Probabilités DC + SD**
12.10	**Repas**	
13.00 15.00	**Dénombrement-Probabilités DC + SD**	**Arithmétique CM + JP**
15.15 16.30	**Exposé et/ou films**	

Mardi 23 décembre 2025

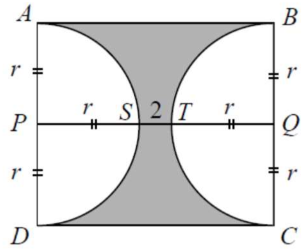
	Groupe 1	*Groupe 2*
10.00	**Accueil**	
10.10 12.10	**Géométrie PM**	**Equations CD**
12.10		
12.50 14.50	**Equations CD**	**Géométrie PM**
15.00 16.30	**Quiz**	**Quiz**

Géométrie

Exercice 1

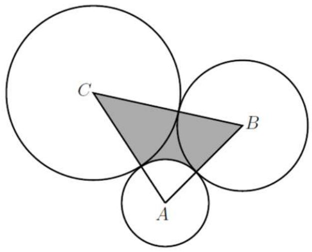


Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle dont l'aire est égale à 224.
Des demi-cercles de diamètres $[AD]$ et $[BC]$ sont tracés à l'intérieur du rectangle.
On suppose que la distance la plus courte entre les demi- cercles est égale à 2.
Déterminer l'aire de la partie ombrée.



On note P et Q les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$ et r le rayon commun aux deux demi-cercles.
Les points P et Q sont aussi les centres des cercles contenant les demi-cercles donc, si on note S et T les points d'intersection de la droite (PQ) avec les cercles de diamètres respectifs $[AD]$ et $[B\ C]$, alors :
$PA = PS = PD = r$ et $QB = QC = QT = r$.
De plus, la distance la plus courte entre les demi- cercles est égale à 2 donc $ST = 2$.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à 224 s'écrit donc $2r(2r+2) = 224$ soit $4r^2 + 4r - 224 = 0$ soit $r^2 + r - 56 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 225$ et ses solutions sont 7 et -8.
Seule la valeur positive convient donc $r = 7$ et l'aire de la partie ombrée est égale à l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $ABCD$ à laquelle on retranche l'aire des deux demi-disques soit l'aire d'un disque de rayon r : $\mathcal{A} = 224 - \pi \times 7^2 = 224 - 49\pi$.

Exercice 2

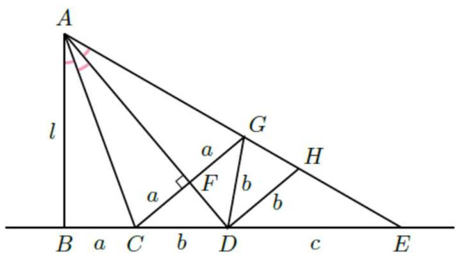


On considère trois cercles de centres respectifs A, B, C et dont les rayons sont respectivement
$r_A = \sqrt{3} - 1, r_B = 3 - \sqrt{3}, r_C = \sqrt{3} + 1$.
Chacun de ces cercles est tangent extérieurement aux deux autres.
Déterminer l'aire du domaine grisé.

L'aire cherchée est égale à l'aire du triangle ABC à laquelle on retranche l'aire du secteur angulaire du petit cercle délimité par les segments $[AB]$ et $[AC]$.
Comme les cercles sont tangents extérieurement,
$AB = r_A + r_B = \sqrt{3} - 1 + 3 - \sqrt{3} = 2, BC = r_B + r_C = 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 = 4, AC = r_A + r_C = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3}$
On constate que $AC^2 + AB^2 = 4 \times 3 + 4 = 16 = BC^2$ ce qui signifie que le triangle ABC est rectangle en A.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
D'autre part, comme l'angle en A est droit, le secteur angulaire considéré a pour aire le quart de l'aire du disque de centre A soit $\frac{1}{4} \times \pi \times (r_A)^2 = \frac{1}{4} \times \pi \times \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = \frac{\pi}{4}(4 - 2\sqrt{3})$.
L'aire du domaine grisé est donc égale à $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}(4 - 2\sqrt{3})$.

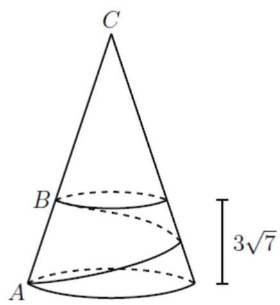
Exercice 3

On considère quatre points B, C, D et E alignés dans cet ordre sur une droite et A un point de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par B tel que les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAE}$ ont même mesure.
On pose $BC = a, CD = b$.
Exprimer la distance DE en fonction de a et b.



Le point C est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Il est donc situé à égale distance des droites (AB) et (AD). Comme le triangle ABC est rectangle en B, la distance de C à (AB) est $BC = a$.
Soit F le projeté orthogonal de C sur (AD). on a de même $CF = a$.
Les triangles ABC et AFC sont rectangles, ont le côté $[AC]$ en commun et $\widehat{BAC} = \widehat{CAF}$. Ils sont donc isométriques d'où $BC = CF = a$.
Soit G le point d'intersection des droites (CF) et (AE). Les triangles ACF et AGF sont rectangles, ont le côté $[AF]$ en commun et $\widehat{CAF} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \widehat{DAG}$. Ils sont donc isométriques d'où $CF = FG = a$.
Les triangles CFD et DFG sont rectangles, ont le côté $[FD]$ en commun et $CF = FG = a$. Ils sont donc isométriques d'où $CD = DG = b$.
Soit H le point d'intersection de la parallèle à (CG) passant par D. Alors $\widehat{GHD} = \widehat{AHD} = \widehat{AGC} = \widehat{ACG} = \widehat{ACB}$. (*)
Montrons que le triangle DGH est isocèle en D et, pour cela, que $\widehat{DGH} = \widehat{DHG}$.
$180° = \widehat{DGH} + \widehat{DGC} + \widehat{CGA} = \widehat{DGH} + \widehat{DCG} + \widehat{ACG} = \widehat{DGH} + \widehat{DCF} + \widehat{ACF} = \widehat{DGH} + 180° - \widehat{ACB}$
On en déduit que $\widehat{DGH} = \widehat{ACB}$.
Comme $\widehat{GHD} = \widehat{ACB}$ d'après (*), on en déduit que $\widehat{DGH} = \widehat{GHD}$ et que le triangle GDH est isocèle en D.
En particulier $DH = DG = b$.
Or, comme les droites (DH) et (CG) sont parallèles, les triangles EDH et ECG sont semblables.
On peut donc écrire $\frac{EH}{EG} = \frac{ED}{EC} = \frac{HD}{GC}$. La deuxième égalité s'écrit $\frac{c}{b+c} = \frac{b}{2a}$ soit $c \times 2a = b(b+c)$ soit $c = \frac{b^2}{2a-b}$ (si $2a \neq b$).

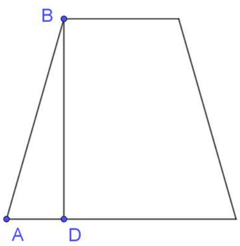
Exercice 4



On considère un cône de révolution, A un point du cercle de sa base, C son sommet et B un point situé sur sa surface latérale, sur le segment $[AC]$.
On suppose que :
- B est à une hauteur de $3\sqrt{7}$ de la base du cône ;
- le périmètre de la base est égal à 3π ;
- la section circulaire du cône par le plan parallèle à la base et passant par B est un cercle de périmètre π.

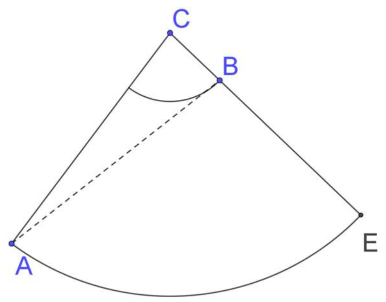
Déterminer la longueur minimale p d'un chemin s'enroulant une fois autour du cône et allant de A à B.

Soit r le rayon de la base et r' celui de la section passant par B. Alors $3\pi = 2\pi r$ soit $r = \frac{3}{2}$ et $\pi = 2\pi r'$ soit $r' = \frac{1}{2}$.



On va déjà calculer la distance AC. Pour cela on note D le projeté orthogonal de B sur la base du cône.
La figure ci-contre représente une section verticale du cône et on sait que $BD = 3\sqrt{7}$.
D'autre part, comme le cône est de révolution, $AD = r - r' = 1$.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en D, on obtient $AB = \sqrt{\left(3\sqrt{7}\right)^2 + 1} = \sqrt{63+1} = 8$.
Si on note E le centre de la base du cône, les triangles AEC et ADB sont semblables (côtés deux à deux parallèles) donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ soit $\frac{8}{AC} = \frac{2}{r} = \frac{2}{3}$ soit $AC = 12$.

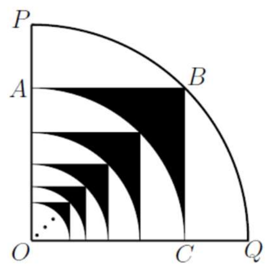
Pour obtenir le chemin le plus court entre A et B sur le cône, on « coupe » le cône suivant les segments $[CA]$ et $[CB]$, ce qui donne un secteur angulaire de centre C délimité par les rayons $[CA]$ et $[CE]$ et le chemin le plus court entre deux points étant la ligne droite, il reste à calculer $p = AB$ sur ce secteur plan.
La longueur de l'arc de A à E est égale au périmètre de la base du cône soit 3π. L'angle du secteur angulaire est proportionnel à la longueur de l'arc qu'il délimite.



Comme son rayon est égal à 12, on a : $\widehat{ACE} = \frac{3\pi}{2\times 12\times \pi} \times 360° = 45°$
Comme $BC = 12 - 8 = 4$, en se plaçant dans le triangle ABC, la relation entre distances et cosinus dans un triangle quelconque permet d'écrire : $p^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos\widehat{ACB}$ soit $p^2 = 144 + 16 - 2 \times 12 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire $p^2 = 160 - 48\sqrt{2}$ et donc $p = \sqrt{160 - 48\sqrt{2}}$

Exercice 5

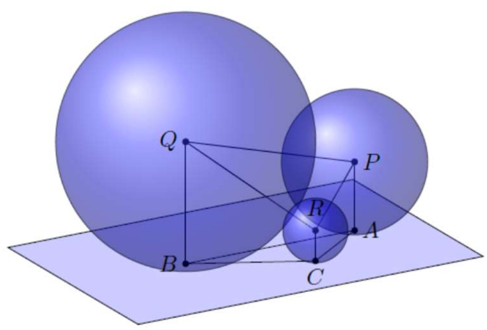
Dans la figure ci-contre, on considère un quart de disque OPQ de rayon 1 dans lequel est inscrit un carré $AOCB$,le point A étant sur $[OP]$, le point B sur le quart de cercle OPQ et le point C sur $[OQ]$.
On imagine réitérer à l'infini le processus à partir de l'arc de cercle OAC en inscrivant à chaque fois un carré dans le quart de disque obtenu.
Quelle est alors l'aire totale $\mathcal{A}$ des différents domaines en noir ?



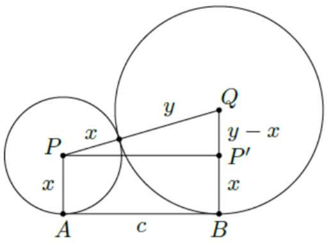
Comme $AOCB$ est un carré, le triangle OCB est isocèle rectangle en C et, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient $OC^2 + OA^2 = OB^2 = 1$ d'où $OA = OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'aire du carré $AOCB$ est donc égale à $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
Le quart de disque OAC a pour rayon $OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc pour aire $\frac{1}{4} \times \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$.
L'aire de la plus grande des régions constituant le domaine en noir est donc $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.
Si on note $\mathcal{A}'$ l'aire du domaine en noir privé de la plus grande des régions le constituant, alors $\mathcal{A} - \mathcal{A}' = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$. (*)
De plus, la figure complète est un agrandissement de la figure obtenue dans le quart de disque OAC. Le coefficient d'agrandissement k est tel que $k^2 = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}\prime}$ et aussi $k^2 = \frac{\mathcal{A}_{OPQ}}{\mathcal{A}_{OAC}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{8}} = 2$ donc $\mathcal{A}' = \frac{1}{2}\mathcal{A}$. En reportant cette égalité dans l'égalité (*), on obtient $\mathcal{A} - \frac{1}{2}\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ soit $\mathcal{A} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 6

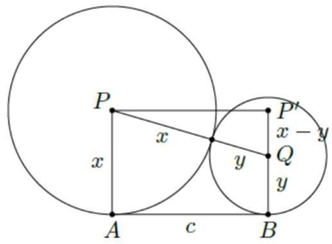
Trois sphères de centres P, Q et R sont tangentes deux à deux et tangentes à un même plan $\mathcal{P}$.
Les points de contact des trois sphères avec le plan sont notés respectivement A, B et C et les rayons des sphères sont notés respectivement x, y, z.
On suppose que les côtés du triangle ABC ont pour longueurs $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.
Déterminer les longueurs x, y, z en fonction des longueurs a, b, c.



Les droites (AP) et (BQ) sont perpendiculaires au plan $\mathcal{P}$ (puisque les sphères sont tangentes à $\mathcal{P}$ en A et en B). Ces droites sont donc parallèles. Le quadrilatère $PABQ$ est donc un trapèze. Si on note P' le projeté orthogonal de P sur la droite (BQ). A priori, deux cas sont alors possibles :



ou



$x \leq y$ $x \geq y$

Dans les deux cas, $PP'Q$ est un triangle rectangle en P' et, d'après le théorème de Pythagore, $PP'^2 + P'Q^2 = PQ^2$. De plus, dans les deux cas, $P'Q^2 = (x-y)^2$, donc $(x+y)^2 = (x-y)^2 + PP'^2$.

Dans les deux cas, le quadrilatère $PP'BA$ a trois angles droits. C'est donc un rectangle d'où $PP'^2 = AB^2 = c^2$.

On en déduit que $(x+y)^2 = (x-y)^2 + c^2$ soit $xy = \frac{c^2}{4}$. (1)

En raisonnant de la même façon avec les sphères de centres Q et R puis les sphères de centres R et P, on obtient $yz = \frac{a^2}{4}$ (2) et $zx = \frac{b^2}{4}$ (3).

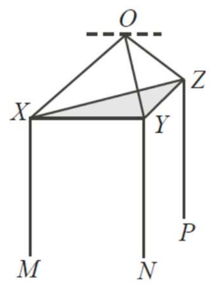
En multipliant membre à membre les égalités (1), (2) et (3), on obtient $x^2y^2z^2 = \frac{1}{64}a^2b^2c^2$. Comme les longueurs sont des nombres positifs, cela signifie que $xyz = \frac{1}{8}abc$.

En divisant membre à membre cette égalité par chacune des égalités (1), (2) et (3), on aboutit à :

$$x = \frac{\frac{1}{8}abc}{\frac{a^2}{4}} = \frac{bc}{2a}, y = \frac{\frac{1}{8}abc}{\frac{b^2}{4}} = \frac{ca}{2b}, \frac{\frac{1}{8}abc}{\frac{c^2}{4}} = \frac{ab}{2c}.$$

Exercice 7

Un luminaire est suspendu d'un point O au plafond comme dans la figure ci-contre.
Trois fils de 50 cm de long partent de O et passent chacun par un des sommets d'un triangle XYZ équilatéral.
On suppose que l'épaisseur de la plaque triangulaire XYZ est négligeable, que cette plaque est horizontale et que ses côtés mesurent 30 cm.
Aux extrémités M, N, P des fils sont attachées des ampoules et la distance du point O au plan horizontal MNP est de 45 cm.
Déterminer la distance du point O au plan (XYZ).



Les plans (XYZ) et (MNP) étant parallèles, le triangle XYZ étant équilatéral et les fils OXM, OYN, OZP étant de même longueur, $OX = OY = OZ$

On pose $OX = OY = OZ = x$. Alors $XM = YN = ZP = 50 - x$ et la distance d des points X, Y, Z au plafond est $d = 45 - (50 - x) = x - 5$.

Soit I, J, K les milieux respectifs des segments , $[XY]$, $[YZ]$, $[ZX]$ et G le point de concours des médianes du triangle XYZ. Par symétrie et puisque le triangle XYZ est équilatéral, le point G est le projeté orthogonal du point O sur le plan (XYZ).

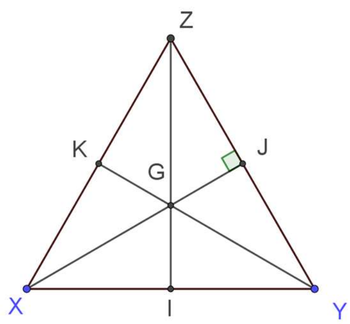
On en déduit que $OG = d = x - 5$.

Dans le triangle OGX rectangle en G, d'après le théorème de Pythagore, $OX^2 = OG^2 + GX^2$ soit $GX^2 = x^2 - (x-5)^2 = 10x - 25$

Or, dans le triangle équilatéral XYZ, le point G est aussi le point de concours des médiatrices des côtés du triangle. En particulier le triangle XIG est rectangle en I donc, par définition de I, $XI = \frac{1}{2}XY = 15$ et $\frac{XI}{XG} = \cos\frac{60°}{2} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

soit $XG = \frac{2}{\sqrt{3}}XI = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

Le nombre x est donc solution de l'équation $10x - 25 = \left(10\sqrt{3}\right)^2$



soit $10x - 25 = 300$ soit $x = 32{,}5$.

Finalement, la distance du point O au plan (XYZ) est $x - 5$ soit 27,5 cm.

Arithmétique

Exercice 1

Déterminer les nombres premiers p, q, r tels que $p^3 + p^2 + p + 1 = qr$.

L'équation donnée s'écrit en fait $(p^2 + 1)(p + 1) = qr$.
Si $p > 2$, alors p et p^2 sont impairs donc $p + 1$ et $p^2 + 1$ sont tous les deux pairs et qr est un multiple de 4. Comme q et r sont des nombres premiers, la seule possibilité est $q = r = 2$. Or $(p^2 + 1)(p + 1) > 15$ puisque $p > 2$. On en déduit que $p = 2$ et alors $qr = 15$ soit $q = 3$ et $r = 5$ ou $q = 5$ et $r = 3$.

Exercice 2 – Palindrome

Un nombre entier est un nombre palindrome lorsque son écriture se lit de la même façon de la gauche la droite que de la droite vers la gauche.
Déterminer les nombres entiers palindromes de cinq chiffres qui sont des carrés parfaits et tels que le chiffre du milieu est le double du premier chiffre.

Un nombre palindrome de cinq chiffres s'écrit $N = 10\,000a + 1\,000b + 100c + 10b + a$.
On sait de plus que $c = 2a$ donc $N = 10\,201a + 1\,010b$.
Or $10\,201 = 101^2$ et $1\,010 = 101 \times 10$ donc N est un multiple de 101 qui est un nombre premier.
Pour que N soit un carré parfait, il est donc nécessaire que N soit un multiple de $101^2 = 10\,201$ c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $N = 10\,201k^2$. Comme N a cinq chiffres, $1 \leq k^2 \leq 9$. De plus, k doit lui-même être un carré parfait, ce qui ne laisse que trois possibilités $k = 1, k = 2$ ou $k = 3$.
On vérifie :
si $k = 1$, alors $N = 10\,201 = 101^2$, si $k = 2$, alors $N = 40\,804 = 202^2$ et ces deux nombres conviennent bien.
En revanche, si $k = 3$, alors $N = 91\,809$ qui n'est pas un palindrome.
Les seules solutions sont donc 10 201 et 40 804.

Exercice 3

Pour tout entier naturel strictement positif n, on considère les nombres entiers :
$a_1 = n^2 - 10n + 23, a_2 = n^2 - 9n + 31, a_3 = n^2 - 12n + 46$.

1. Déterminer la parité du nombre $a_1 + a_2 + a_3$.
2. Déterminer les entiers n tels que les nombres a_1, a_2, a_3 sont des entiers naturels premiers.

1. $a_1 + a_2 + a_3 = 3n^2 - 31n + 100 = 2(n^2 - 15n + 50) + n^2 - n$.
   Donc $a_1 + a_2 + a_3$ a la même parité que $n^2 - n = n(n - 1)$. Or le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair donc $a_1 + a_2 + a_3$ est un nombre pair.
2. On commence par vérifier que les entiers a_1, a_2, a_3 sont deux à deux distincts.
   En effet, $a_1 = a_2$ s'écrit $n^2 - 10n + 23 = n^2 - 9n + 31$ soit $n = -8$, ce qui est impossible puisque $n > 0$.
   $a_1 = a_3$ s'écrit $n^2 - 10n + 23 = n^2 - 12n + 46$ soit $2n = 23$, ce qui est impossible puisque n est un entier.
   $a_2 = a_3$ s'écrit $n^2 - 9n + 31 = n^2 - 12n + 46$ soit $3n = 15$ soit $n = 5$. Dans ce cas $a_1 = -2$, ce qui est impossible puisque a_1 est un entier naturel.
   La somme de trois nombres premiers deux à deux distincts est paire si et seulement l'un d'eux est égal à 2.
   L'équation $n^2 - 10n + 23 = 2$ s'écrit $n^2 - 10n + 21 = 0$ et a pour solutions 3 et 7. Si $n = 3$ alors $a_2 = 13$ et $a_3 = 19$ et si $n = 7$ alors $a_2 = 17$ et $a_3 = 11$. Ces valeurs conviennent.
   L'équation $n^2 - 9n + 31 = 2$ s'écrit $n^2 - 9n + 29 = 0$ et n'a pas de solution.
   L'équation $n^2 - 12n + 46 = 2$ s'écrit $n^2 - 12n + 44 = 0$ et n'a pas de solution.
   Au final les entiers solutions sont 3 et 7.

Exercice 4

1. Démontrer que, pour tout entier x, l'entier $x^3 - x$ est un multiple de 3.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, la différence entre le cube de la somme de n entiers naturels et la somme des cubes de ces entiers naturels est un multiple de 3.

1. Pour tout nombre réel x, $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$.
Or dans trois entiers consécutifs, il y a un entier multiple de 3. Donc, pour tout entier x, $x^3 - x$ est un multiple de 3.

2. Soit n un entier naturel non nul et soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ n entiers.
On veut montrer que $N = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 - (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)$ est un multiple de 3.
Or $N = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)$
soit $N = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \left((a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \cdots + (a_n^3 - a_n)\right)$.
D'après la **a.**, en posant $x = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ est un multiple de 3. Toujours d'après la **a.**, $a_1^3 - a_1, a_2^3 - a_2, a_n^3 - a_n$ sont des multiples de 3.
Par somme N est bien un multiple de 3.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ le nombre obtenu en écrivant à la suite tous les entiers compris entre 1 et n.
Par exemple $A(17) = 1\,234\,567\,891\,011\,121\,314\,151\,617$.
Déterminer le plus petit entier n à quatre chiffres tel que $A(n)$ est divisible par 9.

Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9. Soit n un entier à quatre chiffres. Alors $A(n)$ est la somme de $A(999)$ et des chiffres constituant la suite de l'écriture de n.
On commence par calculer $A(999)$ en remarquant que tout entier de 0 à 999 peut être considéré comme ayant trois chiffres en l'écrivant éventuellement avec des 0 (par exemple, 005 pour 5 et 000 pour 0) et qu'introduire des 0 dans l'écriture de n ne change pas la valeur de $A(n)$.
Il y a 1 000 entiers de 0 à 999 et ces 1 000 entiers, chacun de trois chiffres, donnent au total 3 000 chiffres. Dans ces 3 000 chiffres, les 10 chiffres 0, 1, …, 9 interviennent autant de fois chacun, soit 300 fois chacun.
La somme de tous ces chiffres est donc $A(999) = 300(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 300 \times 45 = 13\,500$.
On calcule alors :
$A(1\,000) = A(999) + 1 + 0 + 0 + 0 = 13\,501$ et $1 + 3 + 5 + 0 + 1 = 10$ n'est pas divisible par 9.
$A(1\,001) = A(1\,000) + 1 + 0 + 0 + 1 = 13\,503$ et $1 + 3 + 5 + 0 + 3 = 12$ n'est pas divisible par 9.
$A(1\,002) = A(1\,001) + 1 + 0 + 0 + 2 = 13\,506$ et $1 + 3 + 5 + 0 + 6 = 15$ n'est pas divisible par 9.
$A(1\,003) = A(1\,002) + 1 + 0 + 0 + 3 = 13\,510$ et $1 + 3 + 5 + 1 + 0 = 10$ n'est pas divisible par 9.
$A(1\,004) = A(1\,003) + 1 + 0 + 0 + 4 = 13\,515$ et $1 + 3 + 5 + 1 + 5 = 15$ n'est pas divisible par 9.
$A(1\,005) = A(1\,004) + 1 + 0 + 0 + 5 = 13\,521$ et $1 + 3 + 5 + 2 + 1 = 12$ n'est pas divisible par 9.
$A(1\,006) = A(1\,005) + 1 + 0 + 0 + 6 = 13\,528$ et $1 + 3 + 5 + 2 + 8 = 19$ n'est pas divisible par 9.
$A(1\,007) = A(1\,006) + 1 + 0 + 0 + 7 = 13\,536$ et $1 + 3 + 5 + 3 + 6 = 18$ est divisible par 9.
Donc le plus petit entier n à quatre chiffres tel que $A(n)$ est un multiple de 9 est 1 007

Exercice 6

On considère trois entiers x, y, z vérifiant le système $\begin{cases} 2^x + 2^y + 3^{z-1} = 2\,259 \\ 2^{x+y} + 3^z = 7\,073 \\ 2^x + 2^y + 3^z = 6\,633 \end{cases}$.

Déterminer le produit $P = xyz$.

On pose $A = 2^x, B = 2^y, C = 3^z$. Le système donné s'écrit alors $\begin{cases} A + B + \frac{1}{3}C = 2\,259 \\ AB + C = 7\,073 \\ A + B + C = 6\,633 \end{cases}$.
De la première et la troisième équation, on déduit $\frac{2}{3}C = 6\,633 - 2\,259 = 4\,374$ soit $C = 6\,561 = 3^8$ d'où $z = 8$.
En reportant dans la deuxième équation, on déduit $AB = 7\,073 - 6\,561 = 512 = 2^9$ d'où $x + y = 9$.
En reportant dans la troisième équation, on déduit $A + B = 6\,633 - 6\,561 = 72$.
Les nombres A et B sont donc les solutions du système $\begin{cases} A + B = 72 \\ AB = 512 \end{cases}$ c'est-à-dire de l'équation $X^2 - 72X + 512 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $72^2 - 4 \times 512 = 56^2$et les solutions sont 8 et 64. On a donc soit $2^x = 8$ et $2^y = 64$ soit $2^y = 8$ et $2^x = 64$ c'est-à-dire soit $x = 3, y = 6$ soit $x = 6, y = 3$. Dans les deux cas, $xyz = 3 \times 6 \times 8 = 144$.

Exercice 7
Les nombres entiers a, b et c s'écrivent, dans le système décimal, avec trois chiffres. Ces chiffres sont différents, et tous les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont utilisés.
Par ailleurs, la suite a, b, c est proportionnelle à la suite 1, 3, 5.
Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

Observons d'abord que $b = 3a$ et $c = 5a$. D'où on déduit que le chiffre des centaines dans l'écriture de a est 1 et que le chiffre des unités de c est 5. Le chiffre des unités de a est donc impair. Ce n'est pas 1. Si c'est 3, alors le chiffre des unités de b est 9, si c'est 9, alors le chiffre des unités de b est 7, et ce ne peut être 7, car alors le chiffre des unités de b serait 1.
Examinons $a = 1x3$. Le chiffre des dizaines de c est alors $1 + \text{mod}\,(5x, 10)$, car $5 \times 3 = 15$, donc il y a une retenue, à laquelle il faut ajouter le reste de la division euclidienne par 10 du produit de 5 par x. Si x est pair, on trouve un 1 comme chiffre des dizaines de c, donc x est impair, et comme on a déjà utilisé 1, 5, 3 et 9, il ne reste que 7 comme possibilité. Or, $3 \times 173 = 519$, encore un 1 !
Examinons $a = 1x9$. Le chiffre des dizaines de c est alors $4 + \text{mod}(5x, 10)$. C'est donc 4 ou 9, mais 9 est déjà pris, donc c'est 4 et x est pair. On peut regarder les trois possibilités qui demeurent :
$a = 129, a = 169$ et $a = 189$
Seule 129 est acceptable ($5 \times 189 = 945, \text{deux } 9, \text{et } 5 \times 169 = 845, \text{mais } 3 \times 169 = 507, \text{un } 0$ …)
Les trois nombres cherchés sont donc 129, 387 et 645

Equations

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$. On considère les deux sommes :

$A=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,025)$ et $B=f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2\,025}\right)$.

Calculer $A+B$.

Pour tout réel non nul y, $f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{\frac{1}{y^2}}{1+\frac{1}{y^2}}=\frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{y^2+1}{y^2}}=\frac{1}{1+y^2}$ donc $f(y)+\ f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{1}{1+y^2}=1$.

On en déduit que $A+B=\big(f(1)+f(1)\big)+\left(f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\left(f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\cdots+\left(f(2\,025)+f\left(\frac{1}{2\,025}\right)\right)$

soit, d'après le calcul précédent, $A+B=2\,025\times 1=2\,025$.

Exercice 2

On considère une fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$et telle que, pour tout réel $x\neq 0$, $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$.

Déterminer $f(1)$.

Pour tout réel $x\neq 0$, on pose $u=x-\frac{1}{x}$.

Alors $u^3=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=x^3-3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}=x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}=x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

soit $u^3+3u=x^3-\frac{1}{x^3}=f\left(x-\frac{1}{x}\right)=f(u)$.

L'équation $x-\frac{1}{x}=1$ s'écrit aussi $x^2-x-1=0$. Elle a pour discriminant $\Delta=5$ et donc au moins une solution qui est non nulle. On peut donc trouver un réel $x\neq 0$ tel que $x-\frac{1}{x}=1$ et alors $f(1)=1^3+3\times 1=4$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ où p,q,r,s sont des nombres réels.

On suppose que $f(1)=59, f(2)=118, f(3)=177$.

Déterminer la somme $S=f(9)+f(-5)$.

On cherche une fonction polynôme g de degré 3 telle que $g(1)=59=f(1), g(2)=118=f(2), g(3)=177=f(3)$ en posant $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Cela revient à résoudre le système $\begin{cases}1+a+b+c=59\\8+4a+2b+c=118\\27+9a+3b+c=177\end{cases}$

soit $\begin{cases}a+b+c=58\\4a+2b+c=110\\9a+3b+c=150\end{cases}$ soit $\begin{cases}a+b+c=58\\3a+b=52\\5a+b=40\end{cases}$ soit $\begin{cases}a+b+c=58\\3a+b=52\\2a=-12\end{cases}$ soit $\begin{cases}a=-6\\b=70\\c=-6\end{cases}$.

Soit alors h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.

Les nombres 1, 2 et 3 sont des racines deux à deux distinctes du polynôme $h(x)$. Il existe donc un polynôme $k(x)$ tel que, pour tout réel x, $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)k(x)$.

De plus comme le degré de $h(x)$ est 4 et celui de $(x-1)(x-2)(x-3)$ est 3, celui de $k(x)$ est 1. Il existe donc deux réels a et b tels que $k(x)=ax+b$.

D'autre part le coefficient de x^4 dans $h(x)$ est 1. On en déduit que $a=1$ et que $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x+b)$.

Alors $h(9)=(9-1)(9-2)(9-3)(9+b)=336(9+b)$

et $h(-5)=(-5-1)(-5-2)(-5-3)(-5+b)=-336(-5+b)$

d'où $S=f(9)+f(-5)=g(9)+h(9)+g(-5)+h(-5)$

soit $S=59\times 9+336\times 9+336b+59\times(-5)-336\times(-5)-336b$

soit $S=59\times(9-5)+336\times(9+5)=4\,940$.

Exercice 4

Pour tout nombre réel x, on note $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $E(\pi)=3, E(-3{,}5)=-4$.

Déterminer tous les nombres réels x tels que $\frac{E(x)+1}{5} = |11 - x|$. (*)

Si on pose $n = E(x)$ alors $x = n + d$ où $0 \leq d < 1$ et l'équation (*) s'écrit $\frac{n+1}{5} = |11 - n - d|$

Deux cas se présentent alors :

- Si $n \leq 10$ alors $n + d \leq 11$ donc (*) s'écrit $\frac{n+1}{5} = 11 - n - d$ soit $6n = 54 - 5d$.
  Comme $0 \leq 5d < 5$ soit $0 \geq -5d > -5$, on a $54 \geq 6n > 49$. Le seul multiple de 6 vérifiant cet encadrement est 54 et donc $n = 9$. Alors, $d = 0$ et $x = 9$.
- Si $n \geq 11$ alors $n + d \geq 11$ donc (*) s'écrit $\frac{n+1}{5} = -11 + n + d$ soit $4n = 56 - 5d$.
  Comme $0 \geq -5d > -5$, on a $56 \geq 4n > 51$. Les deux multiples de 4 vérifiant cet encadrement sont 52 et 56. Si $4n = 52$ alors $n = 13$ et $d = \frac{4}{5}$ donc $x = \frac{69}{5}$. Si $4n = 56$ alors $n = 14$ et $d = 0$ donc $x = 14$.

L'équation donnée a donc trois solutions $9, \frac{69}{5}, 14$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système d'équations $S : \begin{cases} x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$.

Pour tous réels x et y,

$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = (x + xy^2)^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2 = (x + xy^2)^2 - x^2y^2 = (x + xy^2 - xy)(x + xy^2 + xy)$.

Le système S s'écrit donc $\begin{cases} (x + xy^2 - xy)(x + xy^2 + xy) = 525 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 35(x + xy^2 - xy) = 525 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x - xy + xy^2 = 15 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2xy = 20 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = \frac{10}{x} \\ x + 10 + \frac{100}{x} = 35 \end{cases}$ (car $x = 0$ ne peut donner une solution)

La deuxième équation s'écrit $x^2 - 25x + 100 = 0$, équation dont le discriminant est $\Delta = 225 = 15^2$ et dont les solutions sont $\frac{25-15}{2} = 5$ et $\frac{25+15}{2} = 20$.

Les couples solutions du système S sont donc $(5,2)$ et $\left(20, \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois nombres réels.
On suppose que $f(a) = a^3$et $f(b) = b^3$. Déterminer a, b et c.

Le système $\begin{cases} f(a) = a^3 \\ f(b) = b^3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a^3 + a^3 + ba + c = a^3 \\ b^3 + ab^2 + b^2 + c = b^3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a^3 + ba + c = 0 \\ ab^2 + b^2 + c = 0 \end{cases}$

En retranchant la deuxième équation à la première et en conservant la première équation, ce système équivaut à

$\begin{cases} a(a^2 - b^2) + b(a - b) = 0 \\ ab^2 + b^2 + c = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (a - b)(a^2 + ab + b) = 0 \\ c = -b^2(a + 1) \end{cases}$.

- Si $a = b$, la première équation est vérifiée et les solutions du système sont tous les triplets $(a, a, -a^2(a + 1))$ où a est un réel quelconque.
- Si $a = -1$, la deuxième équation s'écrit $c = 0$ et la première équation s'écrit $(a - b)(a^2 + ab + b) = 0$ soit $-1 - b = 0$. Le système a alors une unique solution, le triplet $(-1, -1, 0)$. On remarque que c'est un cas particulier du cas précédent.
- Si $a \neq b$ et $a \neq -1$ alors le système s'écrit $\begin{cases} a^2 + ab + b = 0 \\ c = -b^2(a + 1) \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = -\frac{a^2}{a+1} \\ c = -(a + 1)\left(-\frac{a^2}{a+1}\right)^2 \end{cases}$

  c'est-à-dire $\begin{cases} b = -\frac{a^2}{a+1} \\ c = -(a + 1)\frac{a^4}{(a+1)^2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = -\frac{a^2}{a+1} \\ c = -\frac{a^4}{a+1} \end{cases}$.

  Les solutions du système sont alors les triplets $\left(a, -\frac{a^2}{a+1}, -\frac{a^4}{a+1}\right)$

  Au final, on peut écrire l'ensemble des solutions :

$$S=\{(a,a,-a^2(a+1))/a\in\mathbf{R}\}\cup\left\{\frac{\left(a,-\frac{a^2}{a+1},-\frac{a^4}{a+1}\right)}{a}\in\mathbf{R}-\{-1\}\right\}$$

Exercice 7

Soit f une fonction telle que, pour tout réel $x\neq\frac{2}{3}$, $f(x)+f\left(\frac{x-1}{3x-2}\right)=x$. (*)
Calculer la somme $S=f(0)+f(1)+f(2)$.

En posant $x=1$ dans l'égalité (*), on obtient $f(1)+f(0)=1$. Il faut donc trouver la valeur de $f(2)$.
En posant $x=2$ dans l'égalité (*), on obtient $f(2)+f\left(\frac{1}{4}\right)=2$.
En posant $x=\frac{1}{4}$ dans l'égalité (*), on obtient $f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{4}$.
En posant $x=\frac{3}{5}$ dans l'égalité (*), on obtient $f\left(\frac{3}{5}\right)+f(2)=\frac{3}{5}$.

Si on pose $a=f(2), f\left(\frac{1}{4}\right)=b, f\left(\frac{3}{5}\right)=c$, les nombres a,b,c vérifient le système $\begin{cases}a+b=2\\ b+c=\frac{1}{4}\\ c+a=\frac{3}{5}\end{cases}$. On cherche le nombre a.

$a=\frac{3}{5}-c=\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{4}-b\right)=\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{4}-(2-a)\right)=\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2-a$ soit $2a=\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2=\frac{47}{20}$ soit $a=\frac{47}{40}$.
Au finale, $S=f(1)+f(0)+f(2)=1+a=\frac{87}{40}$

Exercice 8

Déterminer le plus grand entier c pour lequel on peut trouver trois entiers x,y,z tels que
$x^2+4(y+z)=y^2+4(z+x)=z^2+4(x+y)=c$ et tous les réels x,y,z vérifiant ces équations sont des entiers.

L'équation $x^2+4(y+z)=y^2+4(z+x)$ s'écrit $x^2-y^2=4(x-y)$ soit $(x-y)(x+y-4)=0$ ce qui signifie que $x=y$ ou $x+y=4$. (*)
On peut raisonner de même avec les équations $x^2+4(y+z)=z^2+4(x+y)$ qui signifie que $y=z$ ou $y+z=4$ (**)et $y^2+4(z+x)=z^2+4(x+y)$ qui signifie que $z=x$ ou $z+x=4$.
Comme x,y,z jouent le même rôle dans le problème, on va considérer les cas correspondant au nombre d'égalités entre les inconnues x,y,z.

- On ne peut avoir seulement deux égalités car si $x=y$ et $y=z$ alors $x=y=z$.
- On ne peut avoir x,y,z deux à deux distincts car si $x\neq y$ alors $x+y=4$ d'après (*) et si $y\neq z$ alors $y+z=4$ d'après (**) et dans ce cas $x+y=4=y+z$ d'où $x=z$.
- Si on an trois égalités alors $x=y=z$ et le système donné se ramène à l'équation $x^2+8x-c=0$ dont le discriminant est $\Delta=64+4c$ et dont les solutions, si $c>-16$, sont $-4\pm\sqrt{c+16}$.
- Si on a une seule égalité, alors $x=y$ et $y+z=4$ et l'équation $x^2+4(y+z)=c$ s'écrit alors $x^2+4\times 4=c$ soit $x^2+16-c=0$. Ses solutions, si $c>16$, sont $\pm\sqrt{c-16}$.

Si $-16<c<16$ seul le 3e cas est possible. Si $c>16$, les 3e et 4e cas sont possibles.
Comme on cherche la plus grande valeur de c, on s'intéresse déjà au cas $c>16$ (si celui-ci donne des solutions, l'autre éventualité sera inutile) et, comme on cherche des solutions entières, $c-16$ comme $c+16$ doivent être des carrés parfaits.
On pose alors $a=\sqrt{c+16}$ et $b=\sqrt{c-16}$ d'où $a^2=c+16$ et $b^2=c-16$. On en déduit que $a^2-b^2=32$.
Ceci s'écrit $(a-b)(a+b)=32$. Or, a et b doivent être des entiers donc a-b et a+b doivent est des diviseurs de 32.
De plus, comme $(a+b)-(a-b)=2b$, les entiers $(a+b)$ et $(a-b)$ ont même parité et comme a et b sont positifs ou nuls $a-b\leq a+b$. Les diviseurs de 32 sont 1, 2, 4, 8, 16 et 32.
Il n'y a donc au final que deux possibilités $\begin{cases}a+b=16\\ a-b=2\end{cases}$ et $\begin{cases}a+b=8\\ a-b=4\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}a=9\\ b=7\end{cases}$ et $\begin{cases}a=6\\ b=2\end{cases}$.
Dans le premier cas, $c-16=49$ soit $c=65$. Dans le deuxième cas, $c-16=4$ soit $c=20$.
La plus grande valeur pour c est donc 65.

Dénombrement – probabilités

Exercice 1

Sur une longue branche d'arbre, cent moineaux sont assis côte à côte. Tout d'un coup, deux de ces oiseaux quittent la branche, séparant ainsi en trois groupes les moineaux restants. On considère qu'un groupe de moineaux peut être formé d'un ou plusieurs moineaux (mais pas d'aucun).
Combien de paires différentes de moineaux ont pu quitter la branche ?

Numérotons les positions des moineaux de 1 à 100, et soit k et j les positions des deux moineaux qui s'envolent, en posant $k < j$. On ne peut avoir $k = 1$ ou $j = 100$. Si on compte tous les couples possibles avec cette seule restriction, il y en a $\frac{98\times97}{2} = 49 \times 97$. Il faut ensuite enlever tous les couples avec $j = k + 1$ puisque les moineaux ne peuvent pas être voisins (pour créer trois groupes) : il y en a 97 (pour k allant de 2 à 98). Il reste donc 48 × 97 = 4656 couples possibles.

Exercice 2

Un tournoi de tennis débute avec 8 joueuses. Francesca a autant de chances de jouer contre l'une des 7 autres joueuses lors de son premier match. Si Francesca joue contre Dominique ou Estella, la probabilité que Francesca gagne est de $\frac{2}{5}$.
Si Francesca joue contre l'une des 5 autres joueuses, la probabilité qu'elle gagne est de $\frac{3}{4}$.
Quelle est la probabilité que Francesca gagne son premier match ?

La probabilité p que Francesca gagne son premier match est la somme de la probabilité p_1 que Francesca joue contre Dominique ou Estella et gagne et de la probabilité p_2 que Francesca joue conte une des cinq autres joueuses.
Comme Francesca a autant de chances de jouer contre l'une des 7 autres joueuses lors de son premier match, la probabilité qu'elle joue contre Dominique ou Estella pour son premier match est $\frac{2}{7}$ et la probabilité qu'elle joue contre une des cinq autres joueuses lors de son premier matche est $\frac{5}{7}$.
La probabilité que Francesca gagne son premier match sachant qu'elle joue contre Dominique ou Estella est $\frac{2}{5}$.
Donc $p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{35}$.
La probabilité que Francesca gagne son premier match sachant qu'elle joue contre l'une des cinq autres joueuses est $\frac{3}{4}$.
Donc $p_1 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$.
Finalement $p = \frac{4}{35} + \frac{15}{28} = \frac{91}{140} = \frac{13}{20}$

Exercice 3

Un jeu compte 100 cartes numérotées de 1 à 100. Chaque carte a une face jaune et une face rouge, le même numéro paraissant sur chaque face. Jérôme place toutes les cartes sur une table, de manière à montrer les faces rouges. Il retourne d'abord chaque carte portant un nombre divisible par 2. En examinant ensuite toutes les cartes, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3.
Combien de cartes montrent une face rouge à la fin ?

Au début, toutes les cartes montrent une face rouge. Après avoir retourné chaque carte portant un nombre divisible par 2, seules les 50 cartes portant un nombre impair montrent une face rouge.
La deuxième fois, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Les cartes portant un numéro impair divisible par 3 passeront alors du rouge au jaune. Il y a 17 tels numéros, soit 3, 9, 15, 21, …, 93 et 99. De plus, les cartes portant un numéro pair divisible par 3 passeront du jaune au rouge. Il y a 16 tels numéros, soit 6, 12, 18, 24, …, 90 et 96.
À la fin, les cartes montrant une face rouge sont les 50 cartes portant un numéro impair, moins les 17 cartes portant un numéro impair divisible par 3, plus les 16 cartes portant un numéro pair divisible par 3.
Le nombre de telles cartes est égal à 50 -17 +16, c'est-à-dire 49.

Exercice 4

Lucie, Maxime et Elodie répondent à un test indépendamment les uns des autres.

La probabilité que Lucie réussisse le test et que Maxime échoue est de $\frac{3}{20}$. La probabilité que Maxime réussisse et que Elodie échoue est de $\frac{1}{4}$. La probabilité que Lucie et Elodie réussissent tous les deux est de $\frac{2}{5}$.
Déterminer la probabilité qu'au moins une personne parmi Lucie, Maxime et Elodie échoue au test.

Soit a, b, c les probabilités respectives que Lucie, Maxime et Elodie réussissent le test. Comme ils répondent au test indépendamment les uns des autres, la probabilité que les trois réussissent le test est abc et la probabilité qu'au moins une personne parmi Lucie, Maxime et Elodie échoue au test est $1 - abc$.
On sait que $a(1-b) = \frac{3}{20}, b(1-c) = \frac{1}{4}$ et $ac = \frac{2}{5}$ soit $a(1-b) = \frac{3}{20}, b(1-c) = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{2}{5a}$
soit $a(1-b) = \frac{3}{20}, b\left(1 - \frac{2}{5a}\right) = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{2}{5a}$ soit $a(1-b) = \frac{3}{20}, b = \frac{5a}{4(5a-2)}$ et $c = \frac{2}{5a}$
soit $a\left(1 - \frac{5a}{4(5a-2)}\right) = \frac{3}{20}, b = \frac{5a}{4(5a-2)}$ et $c = \frac{2}{5a}$.
La première équation s'écrit $a\left(\frac{4(5a-2)-5a}{4(5a-2)}\right) = \frac{3}{20}$ soit $20a(15a-8) = 3 \times 4(5a-2)$
soit $5a(15a-8) = 3(5a-2)$ soit $75a^2 - 55a + 6 = 0$, équation dont le discriminant est $\Delta = 1225 = 35^2$ et dont solutions sont $\frac{55-3}{150} = \frac{2}{15}$ et $\frac{55+35}{150} = \frac{3}{5}$ qui sont bien des nombres compris entre 0 et 1.
En reportant :
si $a = \frac{2}{15}$ alors , $b = \frac{5a}{4(5a-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{4\left(\frac{2}{3}-2\right)}$ qui est un nombre négatif donc impossible pour une probabilité.
si $a = \frac{3}{5}$ alors , $b = \frac{5a}{4(5a-2)} = \frac{3}{4(3-2)} = \frac{3}{4}$ qui est bien un nombre compris entre 0 et 1. Dans ce cas, $c = \frac{2}{5a} = \frac{2}{3}$ qui bien un nombre compris entre 0 et 1.
On en déduit que la probabilité qu'au moins une personne parmi Lucie, Maxime et Elodie échoue au test est
$1 - abc = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Exercice 5
Un nombre de *Katende* est un entier strictement positif à quatre chiffres dont les deux premiers chiffres et les deux derniers chiffres, dans l'ordre, forment deux entiers qui sont des multiples consécutifs croissants d'un certain entier strictement positif. Par exemple, 2 025 est un nombre de Katende car $20 = 4 \times 5, 25 = 5 \times 5$.
Combien y a-t-il de nombres de Katende supérieurs à 2400 et inférieurs à 2600 ?

On va compter les nombres de Katende compris entre 2 400 et 2 499 c'est-à-dire s'écrivant $2\ 4ab$ puis les nombres de Katende compris entre 2 500 et 2 599 c'est-à-dire s'écrivant $2\ 5ab$, où a, b sont des nombres entiers compris entre 0 et 9.
On recense déjà les couples d'entiers (m, n) tels que $mn = 24$. Ce sont les couples :
$(1,24), (2,12), (3,8), (4,6), (6,4), (8,3), (12,2), (24,1)$
Si $(m, n) = (1,24)$ alors $(m, n+1) = (1,25)$ et on obtient le nombre de Katende 2 425.
Si $(m, n) = (2,12)$ alors $(m, n+1) = (2,13)$ et on obtient le nombre de Katende 2 426.
Si $(m, n) = (3,8)$ alors $(m, n+1) = (3,9)$ et on obtient le nombre de Katende 2 427.
Si $(m, n) = (4,6)$ alors $(m, n+1) = (4,7)$ et on obtient le nombre de Katende 2 428.
Si $(m, n) = (6,4)$ alors $(m, n+1) = (6,5)$ et on obtient le nombre de Katende 2 430.
Si $(m, n) = (8,3)$ alors $(m, n+1) = (8,4)$ et on obtient le nombre de Katende 2 432.
Si $(m, n) = (12,2)$ alors $(m, n+1) = (12,3)$ et on obtient le nombre de Katende 2 436.
Si $(m, n) = (24,1)$ alors $(m, n+1) = (24,2)$ et on obtient le nombre de Katende 2 448.
On procède de même pour les nombres s'écrivant $2\ 5ab$ et on obtient les nombres de Katende 2 526, 2 530 et 2 550.
Il y a donc au total $8 + 3 = 11$ nombres de Katende compris entre 2 400 et 2 600.

Exercice 6
Déterminer le nombre d'entiers N compris strictement entre 1 et 100 000 dont le produit des chiffres est égal à 200.

On remarque déjà que $200 = 2^3 \times 5^2$ et on va traiter plusieurs cas, en fonction du nombre de chiffres de N.

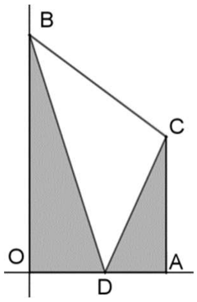
Comme $9 \times 9 < 200$. Ce nombre de chiffres ne peut être 1 et 2. Comme $1 < N < 100\,000$, on étudie donc les cas où ce nombre de chiffres est 3, 4 ou 5.

- Si N a trois chiffres, comme 5 est le seul chiffre multiple de 5, nécessairement, deux des chiffres de N sont des 5. Le troisième chiffre ne peut qu'être $2^3 \times 5^2 = 8$. Il y a alors trois possibilités pour N : 558, 585, 855.
- Si N a quatre chiffres, comme précédemment deux de ces chiffres sont des 5. Le produit des deux autres doit être 8, ce qui donne 2×4 ou 1×8.
  Il y a 6 positions pour les chiffres 5 : $55--, 5-5-, 5--5, -55-, -5-5, --55$.
  Dans chacun de ces cas, on peut avoir dans l'ordre pour les deux autres chiffres : $18, 81, 24, 42$.
  Il y a donc $6 \times 4 = 24$ entiers N de quatre chiffres qui conviennent.
- Si N a cinq chiffres, comme précédemment deux de ces chiffres sont des 5. Le produit des deux autres doit être 8, ce qui donne les chiffres $1, 1, 8$ ou les chiffres $1, 2, 4$ ou les chiffres $2, 2, 2$.
  Il y a 10 positions pour les 5 : $55---, 5-5--, 5--5-, 5---5, -55--, -5-5-, -5--5, --55-, --5-5, ---55$.
  Dans le cas des chiffres $5, 5, 2, 2, 2$, il suffit de compter le nombre de positions différentes des 5, la place des 2 sera alors définie. On a donc alors 10 possibilités pour l'entier N.
  Dans le cas des chiffres $5, 5, 1, 2, 4$, il y a toujours 10 possibilités pour le placement des 5. Il y a ensuite 3 possibilités pour le 1, 2 pour le 2 et une seule pour le 4. On a alors $10 \times 3 \times 2 \times 1 = 60$ possibilités pour l'entier N.
  Dans le cas des chiffres $5, 5, 1, 1, 8$, il y a toujours 10 possibilités pour le placement des 5. Il y a ensuite 3 possibilités pour le 8 et une seule pour placer les chiffres 1. On a alors $10 \times 3 = 30$ possibilités pour l'entier N.

Au total, le nombre d'entiers qui conviennent est $3 + 24 + 10 + 60 + 30 = 127$.

Exercice 7

On demande à des étudiants de placer les points A, B, C et D dans le premier quadrant d'un repère orthonormal d'origine O, de sorte que A soit sur l'axe des abscisses, B sur l'axe des ordonnées, C ait même abscisse que A, D soit sur le segment [OA]. On demande que les longueurs OD, OA, AC, CB, BO soient entières (et non nulles), que le périmètre du quadrilatère OACB soit 32 et que la somme des aires des triangles BOD et DAC soit égale à l'aire du triangle BDC. Les étudiants fournissent toutes les réponses possibles, et deux quelconques n'ont pas donné la même réponse.
Combien y a-t-il d'étudiants ?



La condition sur les aires signifie que la somme des deux aires des triangles rectangles est égale à la moitié de l'aire du trapèze. On a donc : $\frac{(\mathrm{OB}+\mathrm{AC})\times\mathrm{AO}}{4} = \frac{\mathrm{OB}\times\mathrm{OD}}{2} + \frac{\mathrm{DA}\times\mathrm{AC}}{2}$. Cette égalité peut s'écrire $\mathrm{OB} \times (2\mathrm{OD} - \mathrm{AO}) + \mathrm{AC} \times (2\mathrm{DA} - \mathrm{AO}) = 0$ ou encore $(\mathrm{OB} - \mathrm{AC})(\mathrm{OD} - \mathrm{DA}) = 0$. La discussion peut donc s'organiser :

- ou bien le trapèze OACB est un rectangle. On a $\mathrm{OA} + \mathrm{OB} = 16$, mais comme OD et OB sont des entiers, OA prend les valeurs entières de 2 à 15 et OD les valeurs entières inférieures à OA et non nulles. Cela en fait $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 10 + 12 + 13 + 14 = 105$

- ou bien le trapèze n'est pas un rectangle (évitons les redondances) et D est le milieu de [AO]. Comme BC est un entier, une condition nécessaire s'écrit : $\mathrm{OA}^2 + (\mathrm{OB} - \mathrm{AC})^2$ est le carré d'un entier. On essaie donc les premiers triplets pythagoriciens, en tenant compte du fait que OA est un entier pair, attendu que OD est un entier :

OA = 4 donne OB – AC = 3 ou -3 et BC = 5. On prendra AC = 10 et OB = 7 ou AC = 7 et OB = 10
OA = 6 donne OB – AC = 8 ou −8 et BC = 10. On prendra AC = 4 et OB = 12 ou AC = 12 et OB = 4
OA = 8 donne OB – AC = 6 ou −6 et BC = 10. On prendra AC = 4 et OB = 12 ou AC = 12 et OB = 4
OA = 12 donne OB – AC = 5 ou −5 et BC = 13. On prendra AC = 1 et OB = 6 ou AC = 6 et OB = 1
Cela fait 8 possibilités supplémentaires.
Il y a 113 étudiants.