ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Lycée Marie Curie
Versailles

Les mathématiques de l'Encyclopédie

Le premier tome de l'*Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, à* l'origine prévue comme une adaptation de la *Cyclopaedia de* l'Anglais Chambers*,* paraît en 1751. Le travail d'une grosse centaine d'auteurs est coordonné par Denis Diderot (1713-1784) et Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783), qui rédige plus de 1 600 articles très majoritairement de mathématiques et le *Discours préliminaire*. Une aventure qui durera jusqu'en 1772, avec la publication de 17 volumes et 11 volumes de planches, malgré les oppositions, les interdictions et les poursuites des sectateurs du pouvoir et de religieux obtus.

Un handicap à surmonter pour présenter des mathématiques : l'ordre alphabétique… D'Alembert expose les travaux des plus grands mathématiciens du temps. Il en fait partie, son œuvre étant considérable (résolution de l'équation des ondes, théorème de d'Alembert sur les solutions des équations polynômiales, principe de conservation de la quantité de mouvement, etc.)
D'Alembert fut Inhumé au cimetière dit des Porcherons, à Paris. Ses restes furent dispersés à la destruction du cimetière.

Stage préolympique ouvert aux lycéennes et lycéens de première désigné(es) par leurs établissements, les 4 et 5 janvier 2024

____

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, , Nathalie SOARES, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

Les intervenants professeurs : Dominique CLÉNET (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE, Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Martine SALMON (Retraitée)
… Et les professeurs accompagnant leurs élèves :

Emploi du temps

Jeudi 4 janvier 2024

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Accueil		
10 h 10	Arithmétique S.M	Géométrie M.S.	Calcul littéral C.D.
12 h 10	Repas		
13 h 10	Dénombrement P.M.	Arithmétique S.M	Géométrie M.S.
15 h 10	Exposé « Bijections » et films « Loi de Benford », « Problème de Monty Hall », « Conjecture de Kepler » (Films Arte.tv)		

Vendredi 5 janvier 2024

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Accueil		
10 h 10	Calcul littéral C.D.	Dénombrement P.M.	Arithmétique D.C.
12 h 45	Repas		
13 h 15	Géométrie D.C.	Calcul littéral C.D.	Dénombrement P.M
15 h 10	Quiz		

Arithmétique

Exercice 1 – Factorielle et carré parfait

On appelle factorielle d'un entier naturel n le nombre $n! = n \times (n-1) \ldots \times 2 \times 1$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le nombre $S_n = 1! + 2! + \cdots + n!$ est un carré parfait.

On remarque déjà que si $n \geq 4$, $S_n - (1! + 2! + 3! + 4!)$ est un nombre divisible par 10 car il vaut 0 ou contient des factorielles divisibles par $5 \times 2 = 10$. Or $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$.

Conclusion : si $n \geq 4$, alors S_n a donc 3 comme chiffres des unités.

Or, on peut vérifier, en considérant le chiffre des unités, qu'aucun carré parfait n'a 3 comme chiffres des unités.

On regarde donc ce qu'il en est pour $n \in \{1,2,3\}$: $S_1 = 1, S_2 = 3, S_3 = 9$. Les seules solutions sont donc $n = 1$ et $n = 3$.

Exercice 2 – Changement de base

Le nombre dont les chiffres en base b sont $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ (où k est un entier naturel) se note $\overline{\overline{a_k\, a_{k-1} \ldots a_1 a_0}}_b$.

Par exemple, $\overline{235}_{10} = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5 = 235$ et $\overline{235}_7 = 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = 124$.

Déterminer les triplets (x, y, z) d'entiers appartenant à $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ tels que $x \neq 0$ et $\overline{xyz}_{10} = 2 \times \overline{xyz}_7$.

L'équation donnée peut s'écrire $100x + 10y + z = 2(49x + 7y + z)$ soit $2x - 4y = z$.

On constate déjà que nécessairement z est pair. Comme $z \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, z vaut 0, 2, 4 ou 6.

<u>1^er^ cas</u> : $z = 0$. L'équation $2x - 4y = z$ s'écrit $x = 2y$. Les triplets associés sont (2,1,0), (4,2,0) et (6,3,0).

<u>2^e^ cas</u> : $z = 2$. L'équation $2x - 4y = z$ s'écrit $x = 2y + 1$. Les triplets associés sont (1,0,2), (3,1,2) et (5,2,2).

<u>3^e^ cas</u> : $z = 4$. L'équation $2x - 4y = z$ s'écrit $x = 2y + 2$. Les triplets associés sont (2,0,4), (4,1,4) et (6,2,4).

<u>4^e^ cas</u> : $z = 6$. L'équation $2x - 4y = z$ s'écrit $x = 2y + 3$. Les triplets associés sont (3,0,6) et (5,1,6).

Exercice 3 –

Trouver tous les entiers naturels n tels que $20n + 2$ divise $2\,023n + 210$.

Comme $20n + 2$ divise $2\,023 \times (20n + 2)$, dire que $20n + 2$ divise $2\,023n + 210$ revient à direr que $20n + 2$ divise $20 \times (2\,023n + 210) - 2\,023 \times (20n + 2) = 154$. Or $154 < 20 \times 8 + 2$ donc $0 \leq n \leq 7$.

D'autre part, comme $20n + 2$ est pair, $2\,023n + 210$ doit aussi être pair ce qui implique, puisque 210 est pair et $2\,023$ est impair, n est pair.

On n'étudie donc que les cas suivants :

Si $n = 0$, alors $20n + 2 = 2$ et 2 divise 154.

Si $n = 2$, alors $20n + 2 = 42$ et 42 ne divise pas 154.

Si $n = 4$, alors $20n + 2 = 82$ et 82 ne divise pas 154.

Si $n = 6$, alors $20n + 2 = 122$ et 122 ne divise pas 154.

En conclusion, la seule solution est 0.

Autre solution :

$2023n + 210 = 101(20n + 2) + 3n + 8$. Donc si $20n + 2$ divise $2023n + 210$ alors $20n + 2$ divise $3n + 8$.

Comme n est un entier naturel, on a alors $20n + 2 \leq 3n + 8$ ou encore $n \leq \frac{6}{17}$ c'est-à-dire $n = 0$.

On vérifie enfin que cette valeur convient.

Exercice 4 – L'année des copains

On dit que deux nombres premiers sont des *nombres premiers copains* lorsqu'ils diffèrent de 4. Par exemple, 43 et 47 sont des nombres premiers copains comme 7 et 11.

1. Donner trois autres paires de nombres premiers copains
2. Montrer que le seul nombre premier qui appartient à deux paires de nombres premiers copains est le nombre 7.

1. $\{13,17\}, \{19,23\}, \{37,41\}$ sont d'autres paires de nombres premiers copains.
2. Si un nombre n appartient à deux paires de nombres premiers copains, alors il existe un nombre premier p tel que $p, p+4, p+8$ soient des nombres premiers : le nombre $p = n-4$.
   Montrons que l'un des $p, p+4, p+8$ est multiple de 3 en étudiant les cas correspondants aux différents restes (0, 1 ou 2) de la division euclidienne de p par 3.
   Si le reste est nul, alors p est multiple de 3. Comme p est premier, la seule valeur possible pour p est 3 et les paires de nombres premiers copains correspondantes sont $\{3,7\}, \{7,11\}$.
   Si le reste vaut 1, alors il existe un entier k tel que $p = 3k+1$ mais alors $p+8 = 3k+9$ qui est multiple de 3 et ne peut être premier.
   Si le reste vaut 2, alors il existe un entier k tel que $p = 3k+2$ mais alors $p+4 = 3k+6$ qui est multiple de 3 et ne peut être premier.
   Au final le seul nombre premier qui appartient à deux paires de nombres premiers copains est bien le nombre 7.

Exercice 5 – Fractions de rêves

La simplification $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$ est évidemment fausse mais, dans ce cas, le résulta est correct. Trouver tous les autres quotients de nombres entiers naturels dont les numérateurs et dénominateurs sont compris entre 10 et 99 et pour lesquels une telle simplification (de l'unité du numérateur avec la dizaine du dénominateur) donne tout de même un résultat correct.

On remarque déjà que tous les rationnels $\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \dots, \frac{99}{99}$ conviennent.
Tout rationnel aure que ces valeurs dont le numérateur et le dénominateur sont compris entre 10 et 99 peut s'écrire $\frac{10a+b}{10b+c}$ où a, b, c sont des entiers compris entre 1 et 9, $a \neq c$.
Sous ces contraintes, on veut l'égalité $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$, égalité qui s'écrit aussi $9ac = b(10a-c)$.
$b(10a-c)$ doit donc être un multiple de 9.
Si b n'est pas un multiple de 3 alors, 9 doit diviser $10a-c$. Or $10a-c = 9a+(a-c)$ sera multiple de 9 si et seulement si $a-c$ est multiple de 9 ce qui n'est possible (puisque a et c sont compris entre 1 et 9) que si $a = c$, cas exclu ici.
Etudions donc les trois cas où b est multiple de 3.
<u>1er cas</u> : $b = 3$. L'égalité $9ac = b(10a-c)$ s'écrit $9ac = 3(10a-c)$ soit $3ac = 10a-c$ soit $a(10-3c) = c$.
$10-3c$ doit donc être positif et diviser c. On peut vérifier que la seule possibilité est $c = 3$ et alors $a = 3$, cas déjà vu.
<u>2e cas</u> : $b = 6$. L'égalité $9ac = b(10a-c)$ s'écrit $9ac = 6(10a-c)$ soit $a(20-3c) = c$.
$20-3c$ doit donc être positif et diviser c. On peut vérifier que les seules possibilités sont $c = 4$ (et alors $a = 1$), $c = 5$ (et alors $a = 2$) et $c = 6$ (et alors $a = 6$, ce qui est exclu ici car $a \neq c$).
On a donc dans ce cas deux rationnels solutions $\frac{16}{64}$ et $\frac{26}{65}$.
3e cas : $b = 9$. L'égalité $9ac = b(10a-c)$ s'écrit $9ac = 9(10a-c)$ soit $a(10-c) = c$. Les valeurs de c telles que $10-c$ divise c sont 5 (et alors $a = 1$), 8 (et alors $a = 4$) et 9 (et alors $c = 9$, ce qui est exclu ici car $a \neq c$.
On a donc dans ce cas deux rationnels solutions $\frac{19}{95}$ et $\frac{49}{98}$.

Exercice 6 – Problèmes de divisibilité

Soit A, B et C trois entiers compris entre 1 et 9.
1. Quelles sont les valeurs de B telles que le nombre $4B5B2$ soit un entier divisible par 3 ?
2. Quelles sont les valeurs des couples (A, B) telles que le nombre $ABABA$ soit divisible par 4 et pas par 3 ?
3. On pose $N = ACA2 \times BAC$. Déterminer le nombre de triplets (A, B, C) tels que N soit divisible par 15 et pas par 12.

1. L'entier $4B5B2$ est divisible par 3 si et seulement si $4+B+5+B+2$ est divisible par 3 soit $2B+11$ est un multiple de 3. On vérifie (en parcourant les valeurs de 1 à 9 pour B) que les seules valeurs qui conviennent sont $B = 2, B = 5, B = 8$.

2. $ABABA$ n'est pas divisible par 3 si et seulement si $A+B+A+B+A$ soit $3A+2B$ n'est pas divisible par 3, c'est-à-dire, puisque $3A$ est divisible par, $2B$ n'est pas divisible par 3 soit B vaut 1, 2, 4, 5, 7 ou 8. Pour chacune de ces valeurs, $ABABA$ est divisible par si et seulement si BA est divisible par 4.
On rassemble les solutions à l'aide d'un tableau :

B	A
1	2 ou 6
2	4 ou 8
4	4 ou 8
5	2 ou 6
7	2 ou 6
8	4 ou 8

Les couples (A, B) solutions sont donc les couples (2,1), (6,1), (4,2), (8,2), (4,4), (8,4), (2,5), (6,5), (2,7), (6,7), (4,8) et (8,8).

3. Si $N = ACA2 \times BAC$, alors N est divisible par 15 si et seulement si N est divisible par 3 et par 5. Comme un entier est multiple de 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5, $ACA2$,ne peut être multiple de 5. N est donc divisible par 5 si et seulement si $C = 5$ (car C est non nul). On a alors $N = A5A2 \times BA5$.
Comme 3 est un nombre premier, N est un multiple de 3 si et seulement si l'un au moins des nombres $A5A2$ et $BA5$ est un multiple de 3 c'est-à-dire l'un au moins des nombres $2A+7$ et $A+B+5$ est multiple de 3.
D'autre part, N n'est pas divisible par 12 mais divisible par 3 signifie qu'il n'est pas divisible par 4. Comme $BA5$ n'est déjà pas divisible par 2, cela signifie que $A5A2$ n'est pas divisible par 4 c'est-à-dire $A2$ n'est pas divisible par 4. Les valeurs de A qui remplissent cette condition sont 2, 4, 6, 8.
Si $A = 2$, $2A+7 = 11$ qui n'est pas multiple de 3. Donc N est multiple de 3 si et seulement si $A+B+5$ est multiple de 3 soit $B+7$ est multiple de 3. Les valeurs de B qui conviennent sont 2, 5, 8. On a alors 3 triplets solutions.
Si $A = 4$, $2A+7 = 15$ qui est multiple de 3. Donc N est multiple de 3 pour toute valeur de B. On a alors 9 triplets solutions.
Si $A = 6$, $2A+7 = 19$ qui n'est pas multiple de 3. Donc N est multiple de 3 si et seulement si $A+B+5$ est multiple de 3 soit $B+11$ est multiple de 3. Les valeurs de B qui conviennent sont 1, 4, 7. On a alors 3 triplets solutions.
Si $A = 8$, $2A+7 = 23$ qui n'est pas multiple de 3. Donc N est multiple de 3 si et seulement si $A+B+5$ est multiple de 3 soit $B+13$ est multiple de 3. Les valeurs de B qui conviennent sont 2, 5, 8. On a alors 3 triplets solutions.
Le nombre total de triplets solutions est donc $3+9+3+3 = 18$.

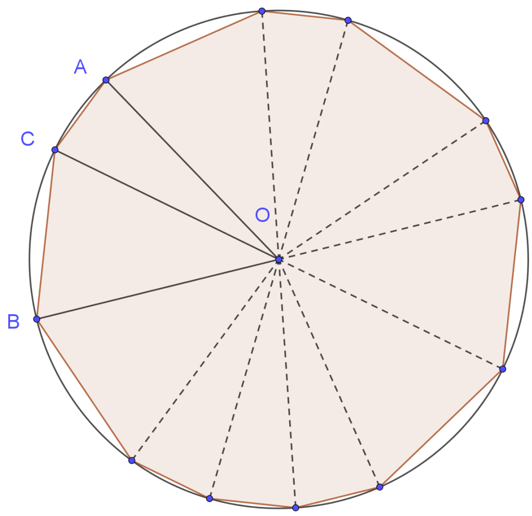
Géométrie

Exercice 1 – Dodécagone mélangé

Soit a et b deux nombres strictement positifs. Un dodécagone inscrit dans un cercle possède six côtés de longueur a et six côtés de longueur b, dans un ordre quelconque. Un sommet C est adjacent à un côté [AC] de longueur a et à un côté [BC] de longueur b.

Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{\mathrm{BCA}}$.

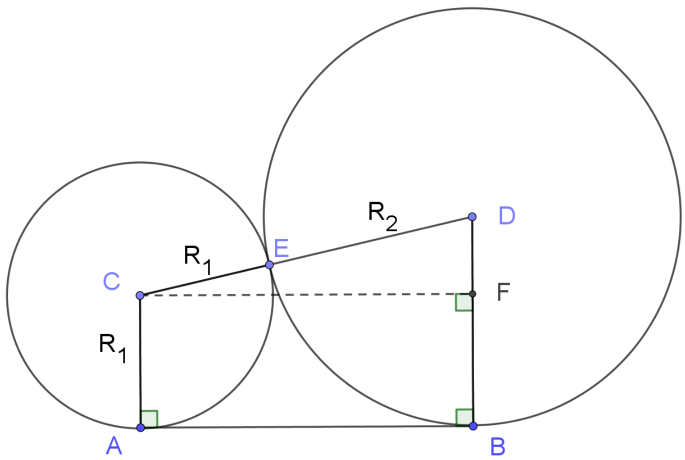
Le dodécagone est divisé en douze triangles isocèles de sommet O, centre du cercle.
Si on note x et y les mesures en degré des angles au centre associées respectivement aux côtés du dodécagone de longueur a et b $6x + 6y = 360$ soit $x + y = 60$.
D'autre part, le point C étant adjacent à un côté [AC] de longueur a et un côté [AB] de longueur b, $\widehat{\mathrm{BCA}} = \widehat{\mathrm{BCO}} + \widehat{\mathrm{OCB}}$.
Dans le triangle BOC isocèle en O, $\widehat{\mathrm{BCO}} = \frac{1}{2}(180 - x) = 90 - \frac{1}{2}x$.
Dans le triangle COA isocèle en O, $\widehat{\mathrm{COA}} = \frac{1}{2}(180 - y) = 90 - \frac{1}{2}y$.
On en déduit que $\widehat{\mathrm{BCA}} = 180 - \frac{1}{2}(x + y) = 180 - 30$
Soit $\widehat{\mathrm{BCA}} = 150$).



Exercice 2 – Sphères tangentes

Trois sphères sont tangentes deux à deux et tangentes à un même plan P, avec lequel les points de contact sont les sommets d'un triangle de côtés, 3, 4 et 6. Quels sont les rayons des trois sphères ?

Soit A et B les points de contacts de deux des sphères tangentes, points distants de 3. On note, comme sur la figure ci-contre représentant les deux sphères en coupe dans le plan contenant (AB) et perpendiculaire au plan P, C et D les centres de ces sphères et R_1, R_2 les rayons associés respectifs ($R_1 \leq R_2$).
Comme les sphères sont tangentes (en un point nommé E),
$R_1 + R_2 = \mathrm{CD}$. De plus A et B étant les points de contact des sphères avec le plan P, $\mathrm{CA} = R_1, \mathrm{BD} = R_2$.
Enfin, si F est le projeté orthogonal de C sur (DB), dans le triangle CFD rectangle en F, le théorème de Pythagore permet d'écrire :



$\mathrm{CF}^2 + \mathrm{DF}^2 = \mathrm{CD}^2$ soit $\mathrm{CF}^2 = (R_2 + R_1)^2 - (R_2 - R_1)^2 = 4R_2R_1$.

Or $\mathrm{CF} = \mathrm{AB}$ (ABFC est un rectangle comme quadrilatère ayant trois angles droits). On obtient donc $R_2R_1 = \frac{9}{4}$.

On pourrait faire le même travail avec les deux autres paires de sphères tangentes.

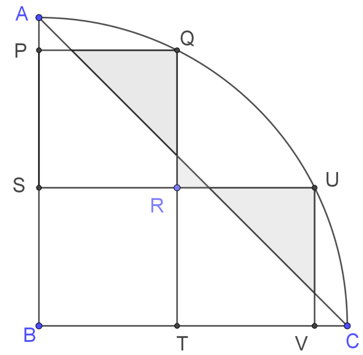
Si R_3 désigne le rayon de la troisième sphère, alors R_1, R_2, R_3 sont les solutions du système : $\begin{cases} R_2R_1 = \frac{9}{4} \\ R_3R_2 = \frac{16}{4} = 4. \\ R_1R_3 = \frac{36}{4} = 9 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} R_2 = \frac{9}{4R_1} \\ R_3 = \frac{4}{R_2} \\ R_1 R_3 = 9 \end{cases}$ soit $\begin{cases} R_2 = \frac{9}{4R_1} \\ R_3 = \frac{16R_1}{9} \\ R_1 R_3 = 9 \end{cases}$ soit $\begin{cases} R_2 = \frac{9}{4R_1} \\ R_3 = \frac{16R_1}{9} \\ \frac{16R_1^2}{9} = 9 \end{cases}$ soit $\begin{cases} R_2 = \frac{9}{4R_1} \\ R_3 = \frac{16R_1}{9} \\ R_1^2 = \frac{81}{16} \end{cases}$ soit : $\begin{cases} R_1 = \frac{9}{4} \\ R_2 = 1 \cdot \\ R_3 = 4 \end{cases}$

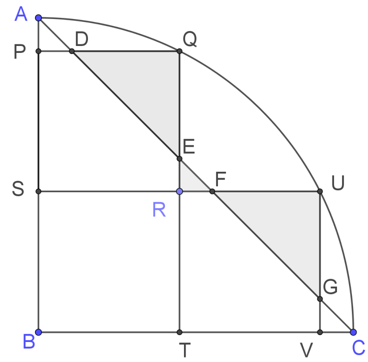
Exercice 3 – Aires dans un cercle

Dans la figure ci-contre, AC est un quart de cercle de centre B.
Les points P et S sont situés sur le segment [AB], les points T et V sont situés sur le segment [BC] et les points Q et U sont situés sur l'arc de cercle AC de telle façon que les quadrilatères PQRS, SRTB et RUVT soient des carrés de côté 10.
Le segment [AC] détermine trois domaines triangulaires grisés.

Déterminer l'aire de cette région grisée.



Par définition de A, B et C, le triangle ABC est rectangle isocèle en B donc :
AB = AC, $\widehat{ABC} = 90°$ et $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 45°$.
Les points D, E, F et G étant placés sur le segment [AC] comme sur la figure ci-contre, comme les droites (PQ), (SU) et (BC) sont parallèles ainsi que les droites (VU), (TQ) et (BA),
$\widehat{PDA} = \widehat{RFE} = \widehat{VCG} = \widehat{BCA} = 45°$ et $\widehat{VGC} = \widehat{REF} = \widehat{PAD} = \widehat{BAC} = 45°$.
De plus $\widehat{PDA} = \widehat{QDE}$, $\widehat{DEQ} = \widehat{REF}, \widehat{RFE} = \widehat{UFG}$ et $\widehat{FGU} = \widehat{VGC}$ comme angles opposés par le sommet.
On en déduit que les triangles PAD, DEQ, REF, UFG et CGV sont rectangles isocèles. Calculons leurs aires.



Comme rayon d'un même cercle, BA = BQ = BU = BC. Or dans le triangle BTQ rectangle en T et d'après le théorème de Pythagore, $BQ^2 = BT^2 + TQ^2 = 100 + 400 = 500$ d'où $BA = BT = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$.

On en tire $PA = BA - BP = 10\sqrt{5} - 20$.

$DQ = PQ - PA = 10 - (10\sqrt{5} - 20) = 30 - 10\sqrt{5}$

$ER = RQ - QE = RQ - DQ = 10 - (30 - 10\sqrt{5}) = 10\sqrt{5} - 20$

$FU = RU - RF = 10 - (10\sqrt{5} - 20) = 30 - 10\sqrt{5}$.

L'aire des régions ombrée est donc

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times DQ \times DE + \frac{1}{2} \times RE \times RF + \frac{1}{2} \times FU \times UG = \frac{1}{2}(30 - 10\sqrt{5})^2 + \frac{1}{2}(10\sqrt{5} - 20)^2 + \frac{1}{2}(30 - 10\sqrt{5})^2$

Soit $\mathcal{A} = (30 - 10\sqrt{5})^2 + \frac{1}{2}(10\sqrt{5} - 20)^2$

$\mathcal{A} = 900 + 500 - 600\sqrt{5} + \frac{1}{2}(500 + 400 - 400\sqrt{5})$

$\mathcal{A} = 1\,850 - 800\sqrt{5}$

Exercice 4 – Points cocycliques

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B, C trois points deux à deux distincts de ce cercle tels que $\widehat{COB}$ et $\widehat{CAB}$ interceptent le même arc BC. Montrer que $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$ en considérant les trois cas suivants.

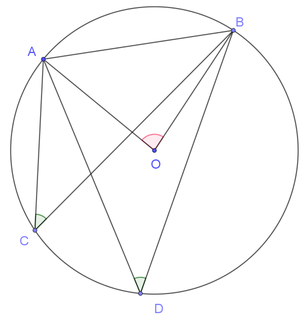
- **a.** Le segment [AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$.
- **b.** Aucun des côtés du triangle ABC n'est un diamètre de $\mathcal{C}$ et le point O est à l'intérieur du triangle ABC.
- **c.** Aucun des côtés du triangle ABC n'est un diamètre de $\mathcal{C}$ et le point O est à l'extérieur du triangle ABC.

Dans les cas **b.** et **c.**, on pourra considérer le point D diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$.

Le résultat ainsi démontré s'appelle le théorème de l'angle inscrit : « dans un cercle, la mesure d'un angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit interceptant le même arc ».

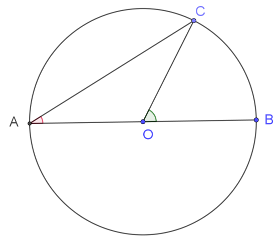
Ce théorème a pour conséquence la propriété suivante :
« Si deux angles interceptent un même arc de cercle AB en étant situés du même côté de la corde [CB] alors ces angles ont même mesure. ».
(Cette mesure est en effet égale à la moitié de l'angle au centre correspondant).

La réciproque de cette propriété est aussi une propriété :
« Si quatre points A, B, C et D sont tels que $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, alors ces quatre points sont sur un même cercle. »♣
(c'est-à-dire cocycliques)

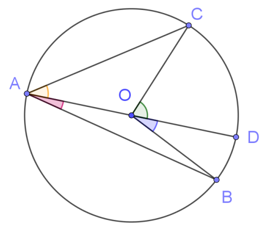


2. Dans un triangle ABC dont tous les angles sont aigus, on note D le pied de la hauteur issue de C. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le segment [CD] en E et recoupe en F le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ADE.
Si $\widehat{ADF} = 45°$, montrer que la droite (CF) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

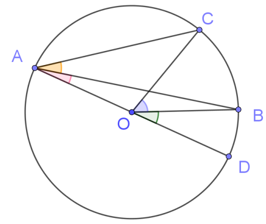
1. a. Le triangle AOC est isocèle en O puisque [OA] et [OC] sont deux rayons du cercle donc : $\widehat{COB} = 180° - \left(180° - 2\widehat{CAO}\right) = 2\widehat{CAO}$
C'est-à-dire, puisque O ∈ [AB], $\widehat{COB} = 2\widehat{CAB}$ d'où $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$



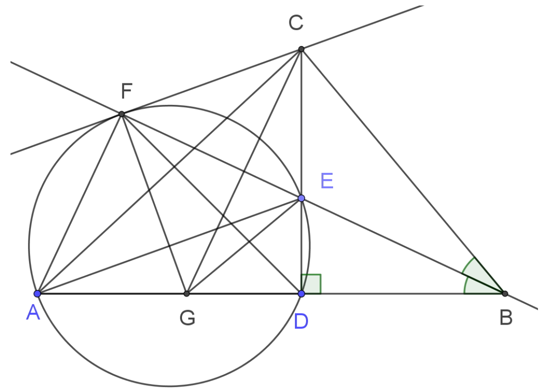
b. Si D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$, alors en appliquant le résultat de la question a., on obtient :
$\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BOD}$ et $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{DOC}$.
De plus, comme O est à l'intérieur du triangle ABC, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$ et $\widehat{BOC} = \widehat{BOD} + \widehat{DOC}$.
On en déduit que $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BOD} + \widehat{DOC}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$



c. Si D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$, alors en appliquant le résultat de la question a., on obtient :
$\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DOB}$ et $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{DOC}$.
De plus, comme O est à l'extérieur du triangle ABC, $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC}$ et $\widehat{DOC} = \widehat{DOB} + \widehat{BOC}$ d'où $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB}$ et $\widehat{BOC} = \widehat{DOC} - \widehat{DOB}$.
On en déduit que $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{DOC} - \widehat{DOB}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.



2. Par définition de D, $\widehat{CDF} = 90° - 45° = 45°$.
$\widehat{ADF}$ et $\widehat{AEF}$ interceptent le même arc AF du cercle $\mathcal{C}$. On en déduit que $\widehat{AEF} = \widehat{ADF} = 45°$.
De même, $\widehat{FAE}$ et $\widehat{FDE}$ interceptent le même arc FE du cercle $\mathcal{C}$ donc $\widehat{FAE} = \widehat{FDE} = \widehat{FDC} = 45°$.
Le triangle AFE est donc isocèle rectangle en F, d'hypoténuse [AE] et le point F est sur la médiatrice du segment [AE], médiatrice qui divise le triangle ADE en deux triangles eux-mêmes rectangles isocèles. De plus, [AE] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ donc démontrer que la droite (CF) est tangente à $\mathcal{C}$ en F revient à montrer que (CF) est perpendiculaire à cette médiatrice.



Notons G le point d'intersection de cette médiatrice avec (AB). Le triangle AGE est isocèle en G.
Posons $\widehat{ABE} = \alpha$. Alors, comme A, D, E et F sont cocycliques,

$\widehat{AFE} = \widehat{ADE}$. Le triangle AFE est donc rectangle en F. Dans le triangle $\widehat{FAB} = 90° - \alpha$.
On en déduit $\widehat{AEG} = \widehat{EAG} = \widehat{EAB} = \widehat{FAB} - \widehat{FAE} = 90° - \alpha - 45° = 45° - \alpha$
et, dans le triangle AED rectangle en E, $\widehat{AED} = 90° - \widehat{EAB} = 45° + \alpha$.

Alors, dans le triangle GED rectangle en D, $\widehat{\mathrm{GED}} = \widehat{\mathrm{AED}} - \widehat{\mathrm{AEG}} = 45° + \alpha - (45° - \alpha) = 2\alpha = \widehat{\mathrm{DBC}}$ puisque (BE) est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{ABC}}$.
Les triangles rectangles GED et CDB sont donc semblables (deux angles de même mesure) et $\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DB}}$ soit $\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}$, ce qui signifie que les triangles GDC et DEB sont semblables. On en déduit que $\widehat{\mathrm{GCD}} = \widehat{\mathrm{EDB}} = \alpha$.
Or $\widehat{\mathrm{GFD}} = \widehat{\mathrm{GFE}} - \widehat{\mathrm{DFE}}$, $\widehat{\mathrm{GFE}} = 45°$ (car la droite (GF) est aussi bissectrice de $\widehat{\mathrm{AFE}}$) et, comme A, D, E et F sont cocycliques, $\widehat{\mathrm{DFE}} = \widehat{\mathrm{DAE}} = \widehat{\mathrm{GAE}} = 45° - \alpha$.
On en déduit $\widehat{\mathrm{GFD}} = 45° - (45° - \alpha) = \alpha = \widehat{\mathrm{GCD}}$ ce qui permet d'affirmer que les points G, D, C et F sont cocycliques et entraine $\widehat{\mathrm{GFC}} = \widehat{\mathrm{GDC}} = 90°$. (CF) est donc bien la tangente à $\mathcal{C}$ en F.

Autre solution.
Le triangle ADE est rectangle en D donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu O de [AE]. Il s'agit de montrer que (OF) et (FC) sont perpendiculaires ou encore que (AE) et (CF) sont parallèles.
Comme les points A, D, E et F sont cocycliques, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{\mathrm{AEF}} = \widehat{\mathrm{ADF}} = 45°$. Il s'agit donc de montrer que $\widehat{\mathrm{EFC}} = 45°$. Seuls les points B, C, D, E et F interviennent alors (mais on verra en conclusion que cela ne simplifie pas le problème).

Posons $\widehat{\mathrm{DBE}} = a$ (avec $0 < a < 45$).

Les trois rédactions suivantes utilisent la trigonométrie avec des présentations différentes.
Dans tous les cas, on utilise des formules qui seront démontrées dans l'option Maths Expertes de Terminale.
Ces formules sont les suivantes :
(1) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
(2) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
(3) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$
(4) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
(5) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
Elles se déduisent toutes de l'égalité (4).
Les solutions 1) et 3) utilisent aussi la loi des sinus à voir sur Internet si cela n'a pas été fait en approfondissement en classe ; elle s'énonce ainsi : dans un triangle ABC, on a $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$ (avec $a = BC, b = CA$ et $c = BA$).

1) Cette rédaction utilise les relations métriques et angulaires dans les triangles.
En considérant le triangle rectangle BDE, on a $\tan a = \frac{DE}{BD}$ et, en considérant le triangle rectangle BDC, on a $\tan 2a = \frac{CD}{BD}$.
On en déduit que $\frac{CD}{DE} = \frac{\tan 2a}{\tan a} = \frac{2}{1 - \tan^2 a}$ (d'après (3))
Ainsi, $\frac{CE}{DE} = \frac{CD - DE}{DE} = \frac{2}{1 - \tan^2 a} - 1 = \frac{1 + \tan^2 a}{1 - \tan^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a - \sin^2 a}$ (on a divisé numérateur et dénominateur par $\cos^2 a$ puis utilisé $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$). On a donc $\frac{DE}{CE} = (\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a)$

Posons aussi $\widehat{EFC} = b$ et $\widehat{ECF} = c$. En utilisant la loi des sinus, on obtient $\frac{\sin c}{EF} = \frac{\sin b}{CE}$ dans le triangle CEF et $\frac{\sin(45° - a)}{DE} = \frac{\sin 45°}{EF}$ dans le triangle DEF (on montre aisément que $\widehat{DFE} = 45° - a$ en utilisant la somme des angles dans les triangles BDE puis DEF). Ainsi $\frac{DE}{CE} = \frac{\sin c}{EF \sin b} \times \frac{EF \sin(45° - a)}{\sin 45°}$.
Toujours en considérant les angles des triangles DEF puis CEF, on obtient $c = 90° + a - b$ donc $\sin c = \cos(a - b)$.
De plus, d'après (5), $\sin(45° - a) = \sin 45° \cos a - \sin a \cos 45° = \sin 45° (\cos a - \sin a)$ (car $\sin 45° = \cos 45°$).
On a donc $\frac{DE}{CE} = \frac{\cos(a - b)}{\sin b} \times (\cos a - \sin a) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin b} \times (\cos a - \sin a)$ (d'après (4)).

Finalement, en comparant les deux expressions de $\frac{DE}{CE}$ obtenues précédemment, on obtient

$\cos a + \sin a = \frac{\cos a \cos b}{\sin b} + \sin a$ ou encore $\sin b = \cos b$ soit $b = 45°$, ce qu'il fallait démontrer.

2) Cette rédaction utilise le repère orthonormé $(D, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{DB}\overrightarrow{DB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{DC}\overrightarrow{DC}$.

En posant $b = DB$, on a $DC = b \tan 2a$ donc $D(0,0)$, $B(b, 0)$, $C(0, b \tan 2a)$ et $E(0, b \tan a)$.

La droite (DF) a pour équation $y = -x$ et la droite (BE) a pour équation $y = -\tan a\,(x - b)$.

On en déduit, en notant (x_F, y_F) les coordonnées de F, $x_F = \tan a\,(x_F - b)$ donc $x_F = \frac{b \tan a}{\tan a - 1}$ et $y_F = -x_F$.

On va calculer $\widehat{BFC}$ avec l'égalité $\cos\widehat{BFC} = \frac{\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FC}}{FB \times FC}$

On a $\overrightarrow{BF} = \left(\frac{b \tan a}{\tan a - 1} - b\right)\vec{u} - \frac{b \tan a}{\tan a - 1}\vec{v} = \frac{b}{\tan a - 1}\vec{u} - \frac{b \tan a}{\tan a - 1}\vec{v} = \frac{b}{\cos\ a\,(\tan a - 1)}(\cos a\,\vec{u} - \sin a\,\vec{v})$

Comme $\tan a < 1$ et comme $\|\cos a\,\vec{u} - \sin a\,\vec{v}\| = 1$, on a $FB = \frac{b}{\cos\ a\,(1 - \tan a)}$ donc $\frac{\overrightarrow{FB}}{FB} = \cos a\,\vec{u} - \sin a\,\vec{v}$.

Remarque. On pouvait obtenir ce résultat directement en observant la figure.

Pour calculer $\overrightarrow{CF}$, on utilise (3).

On a alors $y_F - y_C = -\frac{b \tan a}{\tan a - 1} - \frac{2b \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{b \tan a}{1 - \tan a}\left(1 - \frac{2}{1 + \tan a}\right) = -\frac{b \tan a}{1 + \tan a}$.

On en déduit $\overrightarrow{CF} = \frac{b \tan a}{\tan a - 1}\vec{u} - \frac{b \tan a}{1 + \tan a}\vec{v} = \frac{-b \tan a}{1 - \tan^2 a}((1 + \tan a)\vec{u} + (1 - \tan a)\vec{v})$

Alors $CF = \frac{b \tan a}{1 - \tan^2 a}\sqrt{(1 + \tan a)^2 + (1 - \tan a)^2} = \frac{\sqrt{2}b \tan a}{1 - \tan^2 a}\sqrt{1 + \tan^2 a} = \frac{\sqrt{2}b \tan a}{(1 - \tan^2 a)\cos a}$

car $\sqrt{1 + \tan^2 a} = \sqrt{\frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{1}{\cos a}$.

On a donc $\frac{\overrightarrow{FC}}{FC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos a\,((1 + \tan a)\vec{u} + (1 - \tan a)\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\cos a + \sin a)\vec{u} + (\cos a - \sin a)\vec{v})$.

Finalement $\cos\widehat{BFC} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos a\,(\cos a + \sin a) - \sin a\,(\cos a - \sin a)] = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\widehat{BFC} = 45°$.

3) Cette rédaction utilise deux fois la formule d'Al-Kashi.

On a $CE^2 = FE^2 + FC^2 - 2\,FE\,FC\cos\widehat{CFE}$ donc $\cos\widehat{CFE} = \frac{FE^2 + FC^2 - CE^2}{2FE\,FC}$

et $CF^2 = EC^2 + EF^2 - 2\,EC\,EF\cos\widehat{FEC}$ avec $\widehat{FEC} = \widehat{BED} = 90° - a$

donc $\cos\widehat{CFE} = \frac{2\,EF^2 - 2\,EC\,EF\sin a}{2FE\,FC} = \frac{EF - EC\sin a}{FC}$ (6)

Exprimons les distances EF et EC en fonction de $t = \tan a$ et de BD.

On utilisera les égalités suivantes : $1 + t^2 = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$ (déjà vue dans la rédaction 2),

$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$ et $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$.

- $EC = CD - DE = BD\tan 2a - BD\tan a = BD\left(\frac{2t}{1 - t^2} - t\right) = BD\,\frac{t(1 + t^2)}{1 - t^2}$.

Dans le triangle DEF, on a $\widehat{DFE} = 45° - a$ et $\widehat{EDF} = 45°$ donc, d'après la loi des sinus, on a $\frac{EF}{\sin 45°} = \frac{DE}{\sin(45° - a)}$.

De plus, d'après (5), $\sin(45° - a) = \sin 45° \cos a - \sin a \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos a(1 - \tan a) = \frac{1 - t}{\sqrt{2}\sqrt{1 + t^2}}$

- Donc $EF = DE\,\frac{\sqrt{1 + t^2}}{1 - t} = BD\,\frac{t\sqrt{1 + t^2}}{1 - t}$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } CF^2 = EC^2 + EF^2 - 2\,EC\,EF\sin a &= BD^2\left[\frac{t^2(1 + t^2)}{(1 - t)^2} + \frac{t^2(1 + t^2)^2}{(1 - t^2)^2} - 2\,\frac{t(1 + t^2)}{1 - t^2}\,\frac{t\sqrt{1 + t^2}}{1 - t}\,\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right] \\ &= BD^2\,\frac{t^2(1 + t^2)}{(1 - t)^2}\left[1 + \frac{1 + t^2}{(1 \mp t)^2} - 2\,\frac{t}{1 + t}\right]\end{aligned}$$

$$= BD^2 \frac{t^2(1+t^2)}{(1-t)^2(1+t)^2}[(1+t)^2 + 1 + t^2 - 2t(1+t)]$$
$$= BD^2 \frac{2t^2(1+t^2)}{(1-t)^2(1+t)^2}.$$

- Finalement, $FC = BD\frac{\sqrt{2}t\sqrt{1+t^2}}{1-t^2}$ et, d'après (6),

$\cos\widehat{CFE} = \frac{1}{FC}[EF - EC\sin a] = \frac{1-t^2}{\sqrt{2}t\sqrt{1+t^2}}\left[\frac{t\sqrt{1+t^2}}{1-t} - \frac{t(1+t^2)}{1-t^2}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui prouve que $\widehat{CFE} = 45°$.

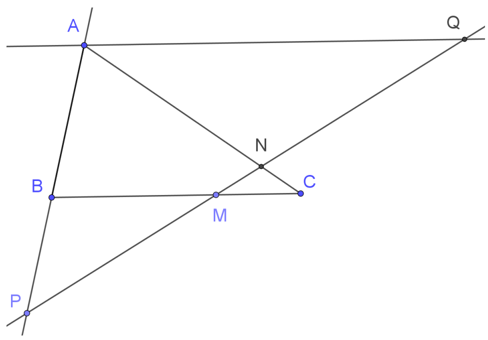
Remarque. En examinant la première solution, on constate que, pour le problème qui consiste à démontrer que $\widehat{BFC} = 45°$ uniquement à partir du triangle BCD, l'utilisation des points A et G permet de faire apparaître des triangles semblables et d'éviter les calculs trigonométriques. L'intérêt de la deuxième solution est donc uniquement de montrer plusieurs utilisations de la trigonométrie et des théorèmes de géométrie du triangle comme la loi des sinus et la formule d'Al-Kashi.

Exercice 5 – Théorème de Menelaüs

Soit ABC un triangle. On considère deux points M et N appartenant respectivement aux segments [BC], [CA] et un point P la demi-droite [AB) mais pas au segment [AB].

Montrer que les points M, N et P sont alignés si et seulement si $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} \times \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NA}} \times \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = 1$.

Si les points M, N et P sont alignés alors, d'après le théorème de Thalès, si Q est le point d'intersection de (PM) avec la parallèle à (BC) passant par A :
$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{QA}}$ et $\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NA}} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{QA}}$.
On en déduit $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} \times \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NA}} \times \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} \times \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{MB}} = 1$.



Réciproquement, si $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} \times \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NA}} \times \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = 1$, montrons que les points M, N et P sont alignés.
La droite (PN) est sécante avec le segment [BC] car s'ils étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès dans le triangle ABC, on aurait
$\frac{NC}{NA} = \frac{PB}{PA}$ et comme $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} \times \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NA}} \times \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = 1$, $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} = 1$ soit B = C, ce qui est exclu.
Soit R le point d'intersection de (PN) et (BC). D'après le sens direct, $\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RC}} \times \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NA}} \times \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = 1 = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} \times \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NA}} \times \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}}$
Donc $\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RC}} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}}$ soit R = M (car R et M sont sur le segment [BC].

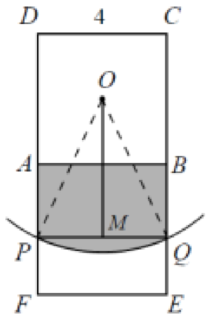
Exercice 6 – Aire sur un cube

Un cube a des arêtes de longueur 4. L'une des extrémités d'une corde de longueur 5 est fixée au centre de la face supérieure du cube.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'aire de la surface du cube que l'autre extrémité de la corde peut atteindre.

Soit $ABCD$ la face carrée supérieure du cube et O son centre. La distance entre O et chacun des sommets du carré $ABCD$ est égale à $\frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{4^2+4^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \sqrt{8}$. Cela correspond à la distance maximale entre O et un point de la face carrée $ABCD$. Comme la longueur de la corde vaut 5, que $\sqrt{8} < 5$, tout point de la face $ABCD$ peut être atteint par l'extrémité libre de la corde. Or l'aire de cette face est égale à 16.
D'autre part, l'extrémité libre de la corde ne peut pas atteindre la face inférieure du cube car la distance la plus courte de O à cette face est égale à 6 et $6 > 5$.
Les faces latérales peuvent être atteinte de la même façon par l'extrémité libre de la corde. Il reste donc à déterminer l'aire a d'une face latérale que l'extrémité libre de la corde peut atteindre.

Soit $AFEB$ une des faces latérales du cube. La figure ci-contre est obtenue en dépliant le cube et lorsque la corde est tendue, son extrémité libre décrit un arc de cercle (de rayon 5) qui coupe $[AF]$ en P et $[BE]$ en Q. L'aire du domaine grisé que l'extrémité libre de la corde peut atteindre est la somme de l'aire du rectangle $APQB$ et du domaine situé entre ce rectangle et l'arc PQ.
Soit M le milieu de $[PQ]$. Le triangle OPQ est isocèle en O car $OP = OQ = 5$ donc le triangle OPM est rectangle en M et le théorème de Pythagore permet d'écrire :
$OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$.
On en déduit $AP = OM - 2 = \sqrt{21} - 2$ et l'aire du rectangle $APQB$ est égale à $4(\sqrt{21} - 2)$.
L'aire du triangle OPQ est donc égale à $\frac{1}{2} \times OM \times PQ = 2\sqrt{21}$.



L'aire d'un disque de rayon 5 est 25π et l'aire du secteur angulaire OPQ est égale à $b = 25\pi \times \frac{\widehat{POQ}}{360}$. (mesure en degrés).
Dabs le triangle OPM rectangle en M, $\sin \widehat{POM} = \frac{PM}{PO} = \frac{2}{5}$. On en déduit $23{,}578 < \widehat{POM} < 23{,}579$
d'où $47{,}156 < \widehat{POQ} < 47{,}158$ et $10{,}28 < 25\pi \times \frac{\widehat{POQ}}{360} < 10{,}29$.
Au final, l'aire du domaine atteint par l'extrémité libre est $\mathcal{A} = 16 + 4a = 16 + 4(4(\sqrt{21} - 2) + 4b - 2\sqrt{21})$
Soit $\mathcal{A} = 16 + 16\sqrt{21} - 32 + b - 8\sqrt{21} = -16 + 8\sqrt{21} + 4b$ d'où $61{,}78 < \mathcal{A} < 61{,}83$. On en déduit qu'une valeur approchée à 10^{-1} près de $\mathcal{A}$ est 61,8.

Calcul littéral

Exercice 1 – Le calcul littéral est utile

1. Quelle est la plus petite valeur prise par la fonction $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + (x + 2y - 6)^2 + 16y - 23$?

2. On donne : $a^3 - 3ab^2 = 52$ et $b^3 - 3a^2b = 47$.

a. Combien vaut $a^2 + b^2$?

b. Combien valent a et b ?

1. On peut développer pour obtenir, pour tout (x, y) : $f(x, y) = 5x^2 + 4y^2 + 4xy - 12x - 8y + 13$

On commence à regrouper : $f(x, y) = (2y + x - 2)^2 + 4x^2 - 8x + 9$

On continue : $f(x, y) = (2y + x - 2)^2 + 4(x - 1)^2 + 5$

Il s'ensuit que le minimum est 5, atteint pour $x - 1 = 0$ et $2y + x - 2 = 0$, c'est-à-dire $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

2. **a.** Observons que $(a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 = (a^2 + b^2)^3$

Cela permet de calculer : $(a^2 + b^2)^3 = 2\,704 + 2\,209 = 4\,913 = 17^3$

Donc $a^2 + b^2 = 17$

b. Repartons de $b^3 - 3a^2b = 47$pour écrire $b^3 - 3(17 - b^2)b = 47$, soit $4b^3 - 51b - 47 = 0$

Cette dernière condition s'écrit : $(b + 1)(4b^2 - 4b - 47) = 0$

$-1, \frac{1+4\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-4\sqrt{3}}{2}$ sont les solutions en b.

Avec la condition $a^3 - 3a(17 - a^2) = 52$, on obtient $4a^3 - 51a - 52 = 0$, qui se factorise en $(a - 4)(4a^2 + 16a + 13) = 0$

$4, \frac{\sqrt{3}-4}{2}, -\frac{\sqrt{3}+4}{2}$ sont les solutions en a. Il n'y a plus qu'à associer chaque solution en a avec « sa » solution en b.

Exercice 2 – Racine et factorisation

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.

2. Montrer que si a est un réel non nul, $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$.

3. En déduire que si a est une racine d'un polynôme $P(x)$ de degré $n \geq 2$, alors il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.

1. $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - x^{n-1} + x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots + -x + x - 1$.

Les termes s'annulent deux à eux sauf le premier et le dernier.

2. Comme a est non nul, $x^n - a^n = a^n\left(\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1\right) = a^n\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{x}{a}\right) + 1\right)$

Soit $x^n - a^n = a^n\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{x^{n-2}}{a^{n-2}} + \cdots + \frac{x}{a} + 1\right) = a\left(\frac{x}{a} - 1\right)a^{n-1}\left(\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{x^{n-2}}{a^{n-2}} + \cdots + \frac{x}{a} + 1\right)$

Soit $x^n - a^n = (x - a)\,(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$.

3. Le nombre a est une racine d'un polynôme $P(x)$ signifie que $P(a) = 0$.

Si n est le degré de $P(x)$ (où $n \geq 2$), il existe $n + 1$ réels $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ tels que, pour tout réel x, $P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Alors :

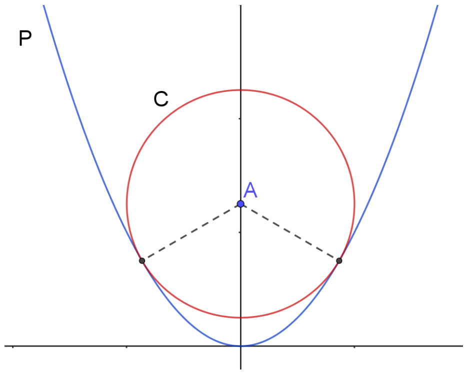
$P(x) = P(x) - P(a) = b_n(x^n - a^n) + b_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + b_1(x - a)$.

D'après la question 2., chaque terme de cette somme peut être factorisé par $(x - a)$. Il existe donc bien un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.

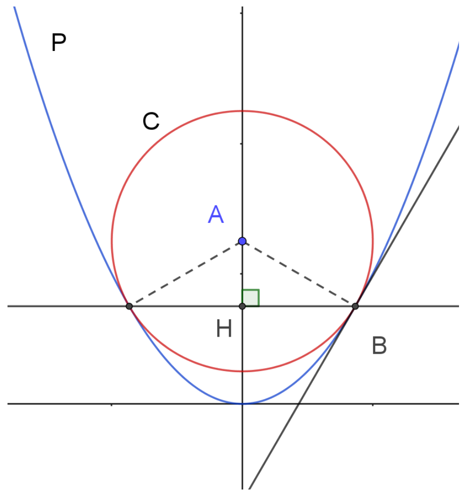
Exercice 3 – Cercle parabolique

On considère, comme sur la figure ci-contre, un cercle C de rayon 1, tangent intérieurement à la parabole P d'équation $y = x^2$.
Son centre A est sur l'axe des ordonnées.

Déterminer les coordonnées de A.



Le centre A de C est sur l'axe des ordonnées. Il existe donc un réel a tel que les coordonnées de A soient $(0, a)$.
Soit B le point d'abscisse positive de contact de C et de P. Il existe un réel b tel que les coordonnées de B soient (b, b^2).
Si H est le projeté orthogonal de B sur l'axe des ordonnées, le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHB rectangle en H permet d'écrire : $\mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2 = \mathrm{AB}^2$ soit $(a - b^2)^2 + b^2 = 1$. (*)
Comme C et P sont tangents en B, la tangente à ces courbes en B est la même. Or la tangente à P en B a pour pente le nombre dérivé en b de la fonction carré soit $2b$. La droite (AB), support du rayon [AB] est perpendiculaire à cette tangente et a donc pour pente $-\frac{1}{2b}$ et pour ordonnée à l'origine a (ordonnée du point A). Son équation réduite s'écrit donc $y = -\frac{1}{2b}x + a$.



Comme cette droite passe aussi par le point, $b^2 = -\frac{1}{2b}b + a = a - \frac{1}{2}$.
En introduisant cette égalité dans (*), on obtient $\left(a - a + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{2} = 1$ soit $\boldsymbol{a = \frac{5}{4}}$.

Exercice 4 – Système tournant

Résoudre le système d'inconnues réelles x, y et z : $\begin{cases} x + y + \frac{1}{z} = 3 \\ x + \frac{1}{y} + z = 3 \\ \frac{1}{x} + y + z = 3 \end{cases}$.

En soustrayant la troisième équation aux deux premières, on obtient un système équivalent au système donné :

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{z} - z\right) = 0 \\ \left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y} - y\right) = 0 \\ \frac{1}{x} + y + z = 3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} (x - z)\left(1 + \frac{1}{xz}\right) = 0 \\ (x - y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0. \\ \frac{1}{x} + y + z = 3 \end{cases}$$

Partant des deux premières équations, quatre cas sont à considérer :

<u>1^er^ cas</u> : $x = z$ et $x = y$. Alors la troisième équation s'écrit $\frac{1}{x} + 2x = 3$ soit $2x^2 - 3x + 1 = 0$, équation dont les solutions sont $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$. Les triplets solutions sont alors $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $(1,1,1)$.

<u>2^e^ cas :</u> $x = z$ et $xy + 1 = 0$ soit $y = -\frac{1}{x}$. Alors la troisième équation s'écrit $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} + x = 3$ soit $x = 3$. Le triplet solution est alors $\left(3, -\frac{1}{3}, 3\right)$.

3^e cas : $1+\frac{1}{xz}=0$ et $x=y$ soit $z=-\frac{1}{x}$ et $x=y$. Alors la troisième équation s'écrit $\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}=3$ soit x=3. Le triplet solution est alors $\left(3,3,-\frac{1}{3}\right)$.

4^e cas : $1+\frac{1}{xz}=0$ et $1+\frac{1}{xy}=0$ soit $z=-\frac{1}{x}$ et $y=-\frac{1}{x}$. Alors la troisième équation s'écrit $\frac{1}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=3$ soit $x=-\frac{1}{3}$. Le triplet solution est alors $\left(-\frac{1}{3},3,3\right)$.

L'ensemble des solutions est donc $S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(1,1,1),\left(3,-\frac{1}{3},3\right),\left(3,3,-\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{3},3,3\right)\right\}$.

Exercice 5 – Attention aux racines carrées

Soit a et b deux nombres réels tels que $ab+\sqrt{ab+1}+\sqrt{a^2+b}\times\sqrt{b^2+a}=0$. (*)

Calculer la somme $a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}$

L'égalité (*) s'écrit $ab+\sqrt{a^2+b}\times\sqrt{b^2+a}=-\sqrt{ab+1}$. En élevant au carré les deux membres de l'égalité, on obtient $a^2b^2+2ab\sqrt{a^2+b}\times\sqrt{b^2+a}+(a^2+b)(b^2+a)=ab+1$

Soit $a^2b^2+2ab\sqrt{a^2+b}\times\sqrt{b^2+a}+a^2b^2+a^3+b^3+ab=ab+1$

Soit $(a^2b^2+a^3)+2a\sqrt{b^2+a}\times b\sqrt{a^2+b}+a^2b^2+b^3=1$

Soit $a^2(b^2+a)+2a\sqrt{b^2+a}\times b\sqrt{a^2+b}+b^2(a^2+b)=1$

Soit $\left(a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}\right)^2=1$

Soit $a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}=\pm 1$.

Montrons que $a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}>0$.

Comme (*) s'écrit aussi $ab=-\sqrt{a^2+b}\times\sqrt{b^2+a}-\sqrt{ab+1}$, $ab\leq 0$.

On ne peut avoir $ab=0$ car alors $-\sqrt{ab+1}=-1$ et d'après (*) on aurait $ab\leq-\sqrt{ab+1}\leq-1$ donc $ab<0$.

Les nombres a et b sont donc de signes contraires et, sans perte de généralité on peut supposer que $a>0>b$.

$a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}=a\left(\sqrt{b^2+a}+b\right)-b\left(-\sqrt{a^2+b}+a\right)$.

Comme $a>0$, $b^2+a>b^2>0$ d'où $\sqrt{b^2+a}>\sqrt{b^2}$. Or $b<0$ donc $\sqrt{b^2}=-b$. On a donc $\sqrt{b^2+a}+b>0$ et $a\left(\sqrt{b^2+a}+b\right)>0$.

D'autre part, $b<0$ donc $0<a^2+b<a^2$ d'où $\sqrt{a^2+b}<\sqrt{a^2}$ soit, comme $a>0$, $\sqrt{a^2+b}<a$ c'est-à-dire $-\sqrt{a^2+b}+a>0$. D'autre part $b<0$ donc $-b>0$ d'où $-b\left(-\sqrt{a^2+b}+a\right)>0$.

Au final, on a bien $a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}>0$ et donc $a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}=1$.

Exercice 6 – Système symétrique

Résoudre le système d'inconnues réelles x et y : $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x^2+y^2+5x+5y+xy=12 \end{cases}$.

On pourra poser $a=x+y$ et $b=xy$.

Si $a=x+y$, alors $a^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=x^3+y^3+3xy(x+y)$.

La première équation du système s'écrit donc $a^3=19+3ab$.

Et $a^2=x^2+y^2+2xy$. La deuxième équation du système s'écrit donc $a^2-2b+5a+b=12$

soit $a^2-b+5a=12$ soit $b=a^2+5a-12$

On a donc $a^3=19+3a(a^2+5a-12)$ soit $2a^3+15a^2-36a+19=0$.

On remarque que 1 est solution de cette équation. D'après le résultat de l'exercice 1, il existe donc trois réels r,s et t tels que, pour tout réel a, $2a^3+15a^2-36a+19=(a-1)(ra^2+sa+t)$

Or, $(a-1)(ra^2+sa+t)=ra^3-ra^2+sa^2-sa+ta-t=ra^3+(s-r)a^2+(t-s)a-t$.

L'égalité $2a^3+15a^2-36a+19=(a-1)(ra^2+sa+t)$ sera donc vérifiée pour tout réel a si et seulement si

$$\begin{cases} r = 2 \\ s - r = 15 \\ t - s = -36 \\ -t = 19 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} r = 2 \\ s = 17 \\ t = -19 \end{cases}.$$

L'équation $2a^3 + 15a^2 - 36a + 19 = 0$ équivaut donc à $a = 1$ ou $2a^2 + 17a - 19 = 0$, équation du second degré dont 1 est aussi une solution, l'autre solution étant $-\frac{19}{2}$ (produit des racines égal à $-\frac{19}{2}$).

Si $a = 1$, alors $b = a^2 + 5a - 12 = -6$. Le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$ a pour solutions $(3, -2)$ et $(-2,3)$ en résolvant l'équation $X^2 - X - 6 = 0$.

Si $a = -\frac{19}{2}$, alors $b = a^2 + 5a - 12 = \frac{123}{4}$. Or $\frac{123}{4} > \frac{1}{4}\left(-\frac{19}{2}\right)^2$, ce qui est impossible car, pou tous réels x et y, $(x + y)^2 - 4xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$ qui est un nombre positif.

Donc les seules solutions sont les couples $(3, -2)$ et $(-2,3)$.

Dénombrement – probabilités

Exercice 1 – Triangle d'entiers

On considère le triangle d'entiers strictement positifs débuté ci-contre et constitué de la façon suivante :

La première rangée contient l'entier impair 1 et la seconde les deux entiers pairs 2 et 4 ;

Pour tout entier $n \geq 2$, la n^e rangée

- commence par le dernier entier de la rangée précédente auquel on ajoute 1 ;
- comprend n entiers pairs consécutifs si n est pair et n entiers impairs consécutifs si n est impair.

1			
2	4		
5	7	9	
10	12	14	16
…			

1. Quelle est la moyenne des entiers de la 5^e^ rangée ?
2. Dans quelle rangée l'entier 145 apparait à la 1^re^ position ?
3. Dans quelle rangée et à quelle position apparait l'entier 1598 ?
4. Dans quelle rangée n les entiers ont pour moyenne 241 ?

1. Les entiers de la 5e rangée sont 17, 19, 21, 23, 25 et ont pour moyenne 21.
2. On remarque sur les premières rangées que le dernier entier de la rangée n est n^2.

Or, si la rangée n se termine par n^2, la rangée suivante commence par n^2+1 et les n entiers suivants de la rangée $n+1$ sont $(n^2+1)+2, (n^2+1)+4, \dots, (n^2+1)+2n$. Le dernier entier de la rangée $n+1$ est donc $(n+1)^2$.

DE proche en proche, on aura donc pour toute rangée n, le dernier terme égal à n^2.

<u>Remarque :</u> on a ici fait un « raisonnement par récurrence ».

Comme $145 = 144 + 1 = 12^2 + 1$, 145 apparait à la première position de la 13e rangée.

3. $1\,598 = 39^2 + 77 = (39^2+1) + 2 \times 38$ donc 1 598 apparait à la 39e position de la 40e rangée.
4. $15^2 < 241 < 16^2$. Tous les entiers des 15 premières rangées sont donc inférieurs ou égaux à 225 et tous les entiers d'une rangée à partir de la 17e rangée sont supérieurs à 256. Seule la 16e rangée peut convenir.
   Elle est constituée des entiers 226, 228, 230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244, 246, 250, 252, 254, 256 et on vérifie que la moyenne de ces 16 entiers est bien 241.

Exercice 2 – Effets secondaires de médicaments

Dans un essai clinique, 1 000 personnes reçoivent un médicament A et 1 000 personnes reçoivent un médicament B. On demande aux 2 000 personnes si elles ont des effets secondaires graves, des effets secondaires légers ou aucun effet secondaire. Les résultats de ce sondage aboutissent aux informations suivantes :

a. La probabilité qu'une personne choisie au hasard ait des effets secondaires graves est égale à $\frac{3}{25}$.

b. La probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi celles présentant des effets secondaires graves ait reçu le médicament A est égale à $\frac{2}{3}$.

c. La probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi celles ayant reçu le médicament A présente des effets secondaires graves ou légers est égale à $\frac{19}{100}$.

d. La probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi celles ayant reçu le médicament B présente des effets secondaires graves ou légers est égale à $\frac{3}{20}$.

Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi celles présentant des effets secondaires légers ait reçu le médicament B ?

La probabilité qu'une personne choisie au hasard ait des effets secondaires graves est égale à $\frac{3}{25}$ donc le nombre de personnes ayant des effets secondaires graves est $2\,000 \times \frac{3}{25} = 240$.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi celles présentant des effets secondaires graves ait reçu le médicament A est égale à $\frac{2}{3}$. Donc le nombre de personnes ayant reçu le médicament A et ayant des effets secondaires graves est $240 \times \frac{2}{3} = 160$. On en déduit que $240 - 160 = 80$ personnes ont reçu le médicament B et ont des effets secondaires graves.

De plus, la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi celles ayant reçu le médicament A présente des effets secondaires graves ou légers est égale à $\frac{19}{100}$ donc le nombre de personnes ayant reçu le médicament A et présentant des effets secondaires graves ou légers est égale à $\frac{19}{100} \times 1\,000 = 190$.
On en déduit que le nombre de personnes ayant reçu le médicament A et présentant des effets secondaires légers est égale à $190 - 160 = 30$.
Enfin, la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi celles ayant reçu le médicament B présente des effets secondaires graves ou légers est égale à $\frac{3}{20}$ donc le nombre de personnes ayant reçu le médicament B et présentant des effets secondaires graves ou légers est égale à $\frac{3}{20} \times 1\,000 = 150$.
On en déduit que le nombre de personnes ayant reçu le médicament B et présentant des effets secondaires légers est égale à $150 - 80 = 70$.
La probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi celles présentant des effets secondaires légers ait reçu le médicament B est donc égale à $\frac{70}{30+70} = \frac{7}{10}$.

Exercice 3 – Générateur d'entiers

Un générateur d'entiers produit de manière aléatoire et équiprobable un entier de 1 à 9. On utilise le générateur un certain nombre de fois puis on calcule le produit N des entiers obtenus.

1. Si le générateur est utilisé 3 fois, quelle est la probabilité que le nombre N soit un nombre premier ?
2. Si le générateur est utilisé 4 fois, quelle est la probabilité que le nombre N soit divisible par 5 mais non divisible par 7.

1. Puisqu'il y a 9 façons de générer chacun des trois entiers, alors il y a en tout $9 \times 9 \times 9 = 729$ façons de générer les trois entiers.

Le produit N est premier si et seulement si deux des facteurs le composant est égal à 1 et l'autre facteur est un nombre premier compris entre 1 et 9 soit 2, 3, 5 ou 7. il est déjà nécessaire que chacun de ses trois facteurs soit un nombre premier.
Il y a 4 façons de choisir le nombre premier et 3 façons de placer les 1. Au total il y a donc 12 façons d'obtenir un nombre N premier.
La probabilité cherchée est donc $p = \frac{12}{729} = \frac{4}{243}$.

2. Le produit N est divisible par 5 si et seulement si au moins l'un des facteurs de ce produit est divisible par 5 c'est-à-dire vaut 5 (facteurs compris entre 1 et 9).

De même, Le produit N n'est pas divisible par 7 si et seulement si aucun des facteurs de ce produit n'est divisible par 7 c'est-à-dire vaut 7 (facteurs compris entre 1 et 9).
On considère plusieurs cas :

- Si le produit comporte quatre 5, une seule possibilité.
- Si le produit comporte trois 5. Ils peuvent être positionnés de quatre façons différentes ($5 \times 5 \times 5 \times \ldots, 5 \times 5 \times \ldots \times 5, 5 \times \ldots \times 5 \times 5$ ou $\ldots \times 5 \times 5 \times 5$) et il reste sept choix pour le nombre distinct de 5 et de 7. Il y a alors $4 \times 7 = 28$ possibilités.
- Si le produit comporte deux 5. Ils peuvent être placés de six façons différentes ($5 \times 5 \times \ldots \times \ldots, 5 \times \ldots \times 5 \times \ldots, 5 \times \ldots \times \ldots \times 5, \ldots \times 5 \times 5 \times \ldots, \ldots \times 5 \times \ldots \times 5, \ldots \times \ldots \times 5 \times 5$) et il reste sept choix pour chacun des deux autres facteurs. Il y alors $6 \times 7 \times 7 = 294$ possibilités.
- Si le produit comporte un seul 5. Il peut prendre quatre positions et il reste sept choix pour chacun des trois autres facteurs. Il y alors $4 \times 7 \times 7 \times 7 = 1\,372$ possibilités.

Au total, il y a $1 + 28 + 294 + 1\,372 = 1\,695$ façons de choisir les quatre facteurs du produit N.
Or, il y a au total 9 façons de générer chacun des quatre entiers, alors il y a en tout $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6\,561$ façons de générer les quatre entiers.
La probabilité cherchée est donc $p = \frac{1\,695}{6561} = \frac{565}{2\,187}$.

Exercice 4 – Partie perdante

Carine participe à un tournoi dans lequel aucune partie ne peut se terminer à égalité. Elle continue à jouer des parties jusqu'à ce qu'elle en perde 2, après quoi elle est éliminée et ne joue plus aucune partie.

La probabilité pour que Carine gagne la première partie est égale à $\frac{1}{2}$.

Après avoir gagné une partie, la probabilité pour que Carine gagne la partie suivante est égale à $\frac{3}{4}$.

Après avoir perdu une partie, la probabilité pour que Carine gagne la partie suivante est égale à $\frac{1}{3}$..

La probabilité pour que Carine gagne 3 parties avant d'être éliminée du tournoi est égale à la fraction irréductible $\frac{a}{b}$.

Quelle est la valeur de $a+b$?

On veut déterminer la probabilité pour que Carine gagne 3 parties avant d'en perdre 2.

Cela signifie que soit elle gagne 3 parties et en perd 0, soit elle gagne 3 parties et en perd 1.

Si Carine gagne ses trois premières parties, les résultats des parties suivantes n'affectent pas la probabilité de gagner.

Si on note V une victoire et D une défaite, alors les résultats conduisant à une victoire de Carine sont les séquences suivantes $VVV, DVVV, VDVV, VVDV$. En utilisant les probabilités données dans l'énoncé et celles d'événements contraires :

$p(VVV)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$.

$p(DVVV)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32}$.

$p(VDVV)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{32}$.

$p(VVDV)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{32}$.

Donc la probabilité que Carine gagne 3 parties avant d'être éliminée du tournoi est égale à

$\frac{9}{32}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{14}{32}=\frac{7}{16}$ et, comme $\frac{7}{16}$ est une fraction irréductible, $a=7$, $b=16$ et $a+b=23$.

Exercice 5 – Qui n'a pas son billet ?

Les organisateurs d'une compétition sportive mettent en vente 15 200 billets. Il y a quatre prix distincts, selon qu'on est placé en série A, B, C ou D.

Le soir du premier jour de vente, on constate que 60% des billets ont été vendus, et qu'il ne reste plus que 10% des billets en série A, 10% en série B, 25% en série C et 70% en série D.

Le soir du deuxième jour, ce sont 3 140 billets qui ont été vendus, 5% de ceux de la série A, 5% aussi pour B et C et 40% pour D.

À la fin des opérations, il reste seulement 160 billets, 2% de ceux de la série A, 3% de ceux de la série B et 1% de ceux de la série C. Les billets série D ont tous été vendus.

Comment se répartissent les 15 200 places entre les séries A, B, C et D ?

Appelons a, b, c, d les effectifs des places de chacune des séries et traduisons les hypothèses :

$$a+b+c+d=15\,200$$
$$18a+18b+15c+6d=182\,400$$

$$a+b+c+8d=62\,800$$
$$2a+3b+c=16\,000$$

(on a rendu les coefficients entiers pour améliorer la visibilité).

Il vient tout de suite : $7d=47\,600$ et donc $d=6\,800$. Par élimination de c et d, on obtient un système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases}18a+18b+15(16\,000-2a-3b)+6\times 6\,800=182\,400\\ a+b+(16\,000-2a-3b)+8\times 6\,800=62\,800\end{cases}$$

Ce système s'écrit, plus simplement : $\begin{cases}12a+27b=98\,400\\ a+2b=7\,600\end{cases}$. La solution en est : $a=2\,800$ et $b=2\,400$.

Et on trouve finalement $c = 3\ 200$

Exercice 6 – Des retournements dans les permutations

Les 2 000 fascicules d'une revue mathématique, numérotés de 1 à 2 000, constituent une pile (avec des étagères intermédiaires), le numéro 1 étant dessus, les numéros étant croissants jusqu'au numéro 2 000, tout en dessous.

Chaque fois qu'on se donne un entier n compris entre 1 et 2 000, les manipulations suivantes sont possibles :

1. Si n est impair, on prend les n premiers fascicules, sur le dessus de la pile, on en inverse l'ordre des numéros et on remet le paquet au-dessus de la pile ;
2. Si n est pair, on prend les n premiers fascicules et sans changer l'ordre, on met le paquet en dessous de la pile.

Bon, ça fait les muscles…

En utilisant ces deux manipulations, combien de permutations de l'intervalle $[\![1, 2\ 000]\!]$ de **N** peut-on obtenir ?

Observons d'abord que tout nombre impair peut être placé en n'importe quel rang impair : si m et n sont deux tels nombres, et si $m < n$, on commence par renverser la partie de la pile qui va de 1 à m avant de renverser la partie de la pile qui va de 1, devenu m, à n.

1	2	…				…	m	m+1	…		…	n	…						2 00(
m	m-1	…					1	m+1	…			n	…						2 00(
n	n-1	…		m+1	1	2	…				m-1	m							2 00(

On remarque qu'il y a des dommages collatéraux dans cet échange de place entre m et n. Il n'est donc pas sûr que toutes ces transpositions soient simultanément possibles.

L'intervalle $[\![m + 1, n]\!]$ de N a été retourné et placé en début de liste. Pourrait-on faire qu'à l'ordre près, les fascicules dont les numéros appartiennent à un certain intervalle conservent leur place ?

Considérons un entier pair n et un entier impair m et effectuons les modifications indiquées ci-dessous :

début	1	2							n	n+1				n+m						2000
Op.(2)	n+1	n+2				n+m	n+m+1					2 000	1	2						n
Op. (1)	n+m	n+m-1				n+1	n+m+1					2 000	1	2						n
Op(2)	1	2			n	n+m	n+m-1			n+1	n+m+1									2 000

La première opération place l'intervalle $[\![1, n]\!]$ en dessous de la pile, la deuxième renverse l'intervalle $[\![n + 1, n + m]\!]$ qui rese au-dessus de la pile, la troisième place l'intervalle $[\![1, n]\!]$en tête (plus exactement, pour respecter le mode d'emploi, tout le dessus de la pile jusqu'à 2 000 passe en dessous. Le résultat est que l'intervalle $[\![n + 1, n + m]\!]$ a été renversé, mais occupe le même espace qu'au début. On a échangé les places de deux fascicules de numéros impairs sans qu'aucun nombre extérieur à cet intervalle ne soit touché. Pour les nombres impairs intérieurs à cet intervalle, on peut les intervertir de la même façon, et au bout du processus, seuls les deux premiers nombres impairs considérés auront été échangés. Les nombres pairs regagnent également leur place.

Maintenant, il s'agit de savoir si on peut échanger les places de deux fascicules de numéros pairs sans affecter les autres, pairs ou impairs.

Pour échanger les places de deux fascicules de numéros pairs, mettons $2n$ et $2n + 2m$, on retourne d'intervalle $[\![2n + 1, 2n + 2m - 1]\!]$, puis l'intervalle $[\![2n - 1, 2n + 2m - 1]\!]$: les fascicules de numéros $2n$ et $2n + 2m$ ont été échangés, mais les fascicules situés dans l'intervalle, sauf les extrêmes, ont retrouvé leur place. Reste à échanger les places des numéros $2n - 1$ et $2n + 2m + 1$, impairs, ce qui peut se faire sans dommage comme vu plus haut.

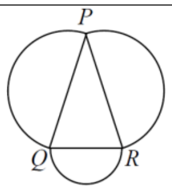
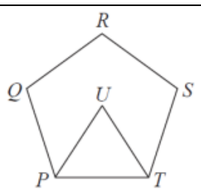
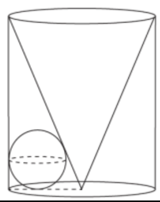
Bilan : les fascicules de numéro impair peuvent occuper toutes les places impaires, et les fascicules de numéro pair peuvent occuper toutes les places paires. Il y a $1\ 000!$ permutations pour les uns et autant pour les autres, au total $(1\ 000!)^2$

Équipe constituée de :

………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………

Exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier les « réponses » que vous donnerez aux questions suivantes. Les professeurs animateurs sont naturellement là pour vous donner des petits coups de pouce (ils vous suggèreront des raisonnements ou des démarches, pas des « réponses », ils peuvent aussi confirmer vos réponses pour vous aider à aller plus loin.

10 questions – 10 réponses – 1 heure

N°	Figure	Énoncé de la question	Réponse
1		Quelle est la somme des entiers naturels diviseurs de 1 184 ?	
2		Sachant que x et y sont des entiers qui vérifient $2x^2 + 8y = 26$, quelle est la seule valeur possible de $x - y$ parmi les valeurs $-16, -8, 22, 26, 30$?	
3		Sachant que x et y sont des nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$, calculer $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2$.	
4		On construit une suite d'entiers ainsi : si un terme a de la suite est impair, le terme suivant est $a + 3$. Sinon, le terme suivant est $a + 5$. Si le premier terme de la suite est 15, quel est le 51ᵉ terme ?	
5		Une canette en aluminium est en forme de cylindre. La canette est fermée aux deux extrémités et a une aire totale de 300 cm². Sachant que la canette aurait une aire totale de 900 cm² si l'on doublait son rayon, que serait son aire totale si l'on doublait plutôt sa hauteur ?	
6		Soit PQR un triangle isocèle en P. On construit, à l'extérieur du triangle les demi-disques de diamètres $[PQ]$, $[PR]$, $[QR]$. Sachant que la somme des aires de ces trois demi-disques est égale à 5 fois l'aire du demi-disque de diamètre $[QR]$, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{PQR}$.	
7		Quelles sont les valeurs du réel m telles que 2 soit le coefficient de x^2 du polynôme obtenu en développant le produit $(3 + 2x + x^2)(m^2x^2 + mx + 1)$?	
8		Soit PQRST un pentagone régulier et PUT le triangle équilatéral construit à l'intérieur du pentagone régulier. Déterminer la mesure de l'angle obtus $\widehat{QUS}$?	
9		Un cylindre de révolution a pour rayon 12 et pour hauteur 30. On y place un cône de révolution dont la base coïncide avec la base supérieure du cylindre et dont le sommet est au centre de la base inférieure du cylindre. On place aussi une sphère tangente à la fois au cône, à la surface latérale du cylindre et à sa base inférieure. Déterminer le rayon de cette sphère.	
10		Combien existe-t-il de couples d'entiers strictement positifs (p, q) tels que $p + q \leq 100$ et $\frac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q} = 17$?	