

**Lycée Marie
Curie
VERSAILLES**

**Collège
François Furet
ANTONY**



Football, marine marchande, mouvement brownien, haïkus

Marc YOR (1949 – 2014)

Il s'était rêvé capitaine, et fut mousse sur un cargo l'été 1967, entra à l'ENSET de Cachan (devenue ENS Paris-Saclay) en 1969, et joua au foot dans le club de la ville (pas dans le club universitaire), participa à un groupe d'alphabétisation des constructeurs de Grigny, fit du mouvement brownien l'objet initial de ses recherches, guida un grand nombre d'étudiants en thèse. Il fut nommé à l'Académie des sciences en 2003.

Chercheur au CNRS puis professeur à l'université, Marc Yor était au travail, et disponible pour d'autres, de 7 heures à 19 heures, mettant à profit ses trajets en transports en commun pour travailler encore (témoin le billet de métro marseillais). Toujours ouvert aux questions, s'en souvenant pour y revenir avec ceux qui les avaient posées, Marc Yor a écrit des dizaines d'articles sur les probabilités, sa production est considérable. C'est un mathématicien de renommée mondiale. Il s'est passionné pour la lettre cachetée que Wolfgang Döblin, naturalisé français et soldat en 1940, avait destinée à l'Académie des sciences (« Vingt-cinq ans d'avance »). Il s'était mis à composer des haïkus (poèmes de trois ou quatre vers courts) et retrouvait de l'énergie pour entraîner les jeunes footballeurs de Saint-Chéron...



Stage ouvert aux collégiennes et collégiens des classes de troisième – 20 et 21 octobre 2025

La Pépinière académique de mathématiques organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril. La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent ou ont hébergé nos stages : l'INRIA, l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet à Antony, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspectrices et inspecteurs : Luca AGOSTINO, Karim AKEB, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF.

Les intervenants professeurs : Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Rémi NIGUES (ancien professeur au collège Auguste Renoir, ASNIERES SUR SEINE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Tony PAQUET (collège Magellan, CHANTELOUP LES VIGNES).

Professeurs accompagnants : Frédérique CLIN (collège Martin Luther King, BUC), Florian HOUDAYER (collège Saint Exupéry, VELIZY), Sabrina KHAYAT (collège Jean-Baptiste Clément, COLOMBES), Florian LOCTIN (collège Romain Rolland, LE PLESSIS ROBINSON), Marc TETTEKPOÉ (collège Emile Zola, IGNY), Khalid ZAOUÏ (collège Albert Camus, BOIS-COLOMBES)

Emploi du temps
Lundi 20 octobre 2025

Antony		Versailles			
		Groupe 1		Groupe 2	Groupe 3
10.00	Accueil	10.00	Accueil		
10.10		10.10	Nombres RN	Logique, dénombrement, probabilités CD	Calcul littéral, Equations SM
12.10		12.10			
13.00		13.00 15.00	Géométrie PM	Calcul littéral, équations SM	Logique, dénombrement, probabilités TP
15.10		15.10	Exposé : le nombre π + Films		

Mardi 21 octobre 2025

Antony		Versailles			
		Groupe 1		Groupe 2	Groupe 3
10.00	Accueil	10.00	Accueil		
10.10		10.10	Logique, dénombrement, probabilités CD	Géométrie PM	Nombres RN
12.10		12.10			
12.45		13.00 15.00	Calcul littéral, équations CD - RN	Nombres TP	Géométrie PM
14.30		15.10	Quiz		

Nombres

Exercice 1 – Histoire de factorielle

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle « factorielle n » le nombre noté $n!$ défini par $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$

Par exemple $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Déterminer l'entier n tel que $n! = 3! \times 5! \times 7!$

On remarque que $3! \times 5! \times 7! = 1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7!$

Soit, en regroupant les facteurs, $3! \times 5! \times 7! = (2 \times 5) \times (3 \times 3) \times (2 \times 4) \times 7! = 10 \times 9 \times 8 \times 7!$

C'est-à-dire $3! \times 5! \times 7! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10!$

Donc $n = 10$.

Exercice 2 – Encore un bug

Une machine à imprimer numérote un par un des billets pour un spectacle. En raison d'un dysfonctionnement, chaque numéro multiple de 3 a été imprimé deux fois. Au total, la machine a imprimé 3 852 chiffres. Combien de billets faut-il retirer de la vente ?

Les billets numérotés de 1 à 9 sont 9 plus les billets 3, 6 et 9, cela fait 12 chiffres, et 3 billets à retirer de la vente. Les billets numérotés de 10 à 99 sont 90 plus les billets dont le numéro est multiple de 3, au nombre de 30, cela en fait 120, pour un total de 240 chiffres, et 30 billets à retirer de la vente. Nous en sommes à 252 chiffres et 42 billets de trop. Les billets numérotés de 100 à 999 sont 900, cela fait 2 700 chiffres, plus 900 chiffres pour les 300 multiples de 3.

Au total $252 + 2\,700 + 900 = 3\,852$ chiffres. La machine a imprimé 990 billets authentiques et 333 billets à retirer de la vente.

Exercice 3 – Quatuors

Quatre nombres premiers distincts ont pour somme 50. Quels peuvent être ces quatre nombres ?

Comme on les cherche distincts, ils sont tous impairs. En effet, 2 est le seul nombre premier pair et si 2 figurait parmi ces quatre nombres, les trois autres étant impairs auraient une somme impaire (somme impaire de nombres impairs). Il existe des entiers distincts m, n, p, r tels que les nombres cherchés soient $2m + 1, 2n + 1, 2p + 1, 2r + 1$, ce qui fait que $m + n + p + r = 23$, le plus grand de ces nombres (mettons que c'est m) étant inférieur ou égal à 17. On peut finir par un tableau qu'on construit par éliminations successives :

m	$n + p + r$	(n, p, r)	Solution proposée
15	8	(5, 2, 1)	(31, 11, 5, 3)
14	9	(6, 2, 1)	(29, 13, 5, 3)
14	9	(5, 3, 1)	(29, 11, 7, 3)
11	12	(9, 2, 1)	(23, 19, 5, 3)
11	12	(8, 3, 1)	(23, 17, 7, 3)
11	12	(6, 5, 1)	(23, 13, 11, 3)
9	14	(8, 5, 1)	(19, 17, 11, 3)
9	14	(6, 5, 3)	(19, 13, 11, 7)

Exercice 4 – Optimisation

Les côtés d'un rectangle sont des entiers naturels non nuls. Son périmètre P est un multiple de 7 et son aire A est un multiple de 9.

Quelle est la plus petite valeur possible de P ?

Si on note respectivement l et L la largeur et la longueur du rectangle alors $P = 2(l + L)$. Le nombre P doit donc être multiple à la fois de 2 et de 7.

Le plus petit multiple pair de 7 est 14. Dans ce cas, $l + L = 7$ et les couples solutions sont (1,6), (2,5), (3,4). Les aires correspondantes sont 6, 10 et 12. Aucun de ces nombres n'est un multiple de 9.

Le multiple pair suivant de 7 est 28. Dans ce cas $l + L = 14$ et les couples solutions sont (1,13), (2,12), (3,11), (4,10), (5,9), (6,8) et (7,7). Les aires correspondantes sont 13, 24, 33, 40, 45, 48 et 49. Parmi ces nombres, seul 45 est un multiple de 9.

La plus petite valeur possible de P est donc 14, pour $l = 5$ et $L = 9$.

Exercice 5

Déterminer le nombre de rectangles différents ayant des côtés de longueurs entières et une aire égale à 2 025.

Si a et b désignent respectivement la largeur et la longueur d'un rectangle ($a < b$), déterminer le nombre de rectangles solutions revient à déterminer le nombre de couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a < b$ et $ab = 2\,025$.

Or $2\,025 = 3^4 \times 5^2$. Tout diviseur de 2 025 s'écrit $3^c \times 5^d$ où $0 \leq c \leq 4$ (ce qui donne 5 valeurs possibles pour c) et $0 \leq d \leq 2$ (ce qui donne 3 valeurs possibles pour d). Le nombre 2 025 a donc 15 diviseurs.

1^{er} cas : $a = b$. Alors le rectangle est un carré de côté 45.

2^e cas : $a < b$. Alors le diviseur a ne peut prendre que 7 valeurs (qui sont 1, 3, 3^2 , 3^3 , 3^4 , 5, 5^2).

Au total, il y a donc 8 rectangles solutions.

Exercice 6

Pour tout entier positif de quatre chiffres noté $N = \overline{abcd}$, on considère le nombre $N' = \overline{dcba}$.

Déterminer N tel que N' soit aussi un nombre de quatre chiffres et $N' = 4N$.

Comme N et N' sont des nombres de quatre chiffres, on doit déjà avoir $a \neq 0$ et $d \neq 0$.

De plus, l'égalité $N' = 4N$ s'écrit $1\,000d + 100c + 10b + a = 4\,000a + 400b + 40c + 4d$. (*)

En considérant les chiffres des unités, le nombre a doit être le chiffre des unités du nombre $4d$. Il doit donc être pair.

Si a vaut 4, 6 ou 8, le nombre N' aura plus de quatre chiffres. Donc $a = 2$.

Alors les seules valeurs de d garantissant que 2 est le chiffre des unités de $4d$ sont $d = 3$ et $d = 8$.

Mais si $d = 3$, alors $1\,000d + 100c + 10b + a < 3\,000 + 900 + 90 + 9 < 4\,000 < 4\,000a + 400b + 40c + 4d$.

Donc $d = 8$.

L'équation (*) s'écrit donc $100c + 10b + 2 = 400b + 40c + 32$ soit $390b + 30 = 60c$ c'est-à-dire $13b + 1 = 2c$.

Comme $0 \leq c \leq 9$, $1 \leq 13b + 1 \leq 18$. Comme on ne peut avoir $b = 0$ dans l'égalité $13b + 1 = 2c$, la seule valeur de b qui convient est $b = 1$ et alors $c = 7$.

Exercice 7

1. Calculer le produit $P = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2\,024}\right)\left(1 + \frac{1}{2\,025}\right)$.

2. Calculer la somme $S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \dots - 2\,023 + 2\,024 - 2\,025$.

$$1. \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2+1}{2} \times \frac{3+1}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}.$$

Plus généralement, si n est un entier naturel non nul, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n+1} = \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1}$.

On en déduit que $P = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \dots \times \frac{2\,025}{2\,024} \times \frac{2\,026}{2\,025} = \frac{2\,026}{2} = 1\,013$.

2. $S = (-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + (-7 + 8) + \dots + (-2\,023 + 2\,024) - 2\,025$

soit $S = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 - 2\,025$.

Le nombre de 1 de la somme est celui des couples de parenthèses ouvrantes et fermantes. Le deuxième nombre de chaque parenthèse est pair et va de 2 à 2024. Comme on a regroupé les termes par deux, il y a 1 012 nombres 1 dans la somme.

Donc $S = 1\,012 - 2\,025 = -1\,013$.

Calcul littéral – Équations

Exercice 1

Après avoir peint en rouge un pavé droit en bois à section carrée (ses dimensions sont des **nombre entiers**), on le découpe en dés d'arête de longueur 1. On s'aperçoit alors qu'il y a autant de dés que de faces de dés peintes en rouge. Quelles sont les dimensions de ce pavé ?

Soit x la longueur du côté de la base carrée du parallélépipède et soit h sa hauteur. Le nombre de dés obtenus dans le découpage est $x^2 h$ tandis que le nombre de faces peintes en rouge est $2x^2 + 4xh$.

L'énoncé se traduit donc par l'égalité $x^2 h = 2x^2 + 4xh$ soit, en divisant les deux membres de l'égalité par x (car $x \neq 0$),

$$xh = 2x + 4h \text{ soit } h = \frac{2x}{x-4} = 2 + \frac{8}{x-4} \text{ pour } x \neq 4.$$

Or h est un nombre entier. Le nombre $x - 4$ doit donc être un diviseur de 8 et donc valoir 1, 2, 4 ou 8.

Les seuls entiers x vérifiant cela sont 5, 6, 8 et 12.

Les hauteurs correspondantes sont respectivement 10, 6, 4 et 3.

Exercice 2

Déterminer les nombres x et y tels que $\frac{x-y}{x+y} = 9$ et $\frac{xy}{x+y} = -60$.

La première égalité s'écrit $x - y = 9(x + y)$ soit $0 = 8x + 10y$ c'est-à-dire $y = -\frac{4}{5}x$.

La deuxième équation s'écrit alors $\frac{x \times (-\frac{4}{5}x)}{x - \frac{4}{5}x} = -60$ soit $-\frac{4}{5}x^2 = -60 \times (x - \frac{4}{5}x)$ c'est-à-dire $-\frac{4}{5}x^2 = -60 \times (\frac{1}{5}x)$

soit $\frac{4}{5}x^2 - \frac{60}{5}x = 0$ c'est-à-dire $\frac{1}{5}x(4x - 60) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 15$.

On ne peut avoir $x = 0$ car alors $y = 0$ et $x + y = 0$: les quotients de l'énoncé ne sont pas, définis.

Donc $x = 15$ et $y = -\frac{4}{5} \times (15) = -12$.

Exercice 3

Les nombres a, b, c et d sont des entiers distincts deux à deux, supérieurs ou égaux à 1, inférieurs ou égaux à 9. On leur associe le nombre $N = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

Quelle est la plus grande valeur de N inférieure à 1 ?

En réduisant au même dénominateur, on obtient $N = \frac{ad+bc}{bd}$ (forme non réduite).

Le nombre rationnel inférieur à 1, dont le dénominateur est bd et qui soit le plus proche de 1 est $\frac{bd-1}{bd}$.

Il est d'autant plus proche de 1 que le produit bd est grand. $9 \times 8 = 72$ est le plus grand produit de nombres distincts de un chiffre. Or $\frac{7}{8} + \frac{1}{9} = \frac{71}{72}$. C'est la plus grande valeur de N inférieure à 1.

Exercice 4

Déterminer les dimensions d'un rectangle dont les diagonales mesurent 185 m et dont l'aire vaut 10 032 m².

Soit x et y les dimensions, respectivement longueur et largeur, du rectangle. La longueur commune des diagonales est $\sqrt{x^2 + y^2}$. Le problème revient donc à trouver les réels positifs x et y tels que $x^2 + y^2 = 185^2$ et $xy = 10\,032$.

Or $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$ et $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$

Le problème conduit donc à chercher les réels positifs x et y tels que :

$$(x - y)^2 = 185^2 - 2 \times 10\,032 \text{ et } (x + y)^2 = 185^2 + 2 \times 10\,032$$

soit $(x - y)^2 = 119^2$ et $(x + y)^2 = 233^2$.

soit, puisque par définition, $x \geq y > 0$, $x - y = 119$ et $x + y = 233$

soit $x + 119 = y$ et $x + x + 119 = 233$.

La deuxième équation a pour solution $x = 57$ et, par la première équation, on obtient $y = 176$.
On vérifie que $57 \times 176 = 10\,032$ et $57^2 + 176^2 = 34\,225 = 185^2$.

Exercice 5

Maxime et Lucie doivent se rendre à la ville voisine à une distance de 22,5 km. Ils partagent un vélo et doivent arriver en même temps. Lucie part à vélo à une vitesse de 8 kmh^{-1} . Plus tard, elle laisse le vélo et se met à marcher à une vitesse de 5 kmh^{-1} . Maxime marche d'abord à une vitesse de 4 km h^{-1} , puis en arrivant au vélo, se met à pédaler à une vitesse de 10 kmh^{-1} .

Pendant combien de minutes le vélo a-t-il été laissé de côté ?

Comme Maxime et Lucie doivent arriver en même temps, on a :

temps mis par Maxime (pour se rendre à destination) = temps mis par Lucie

Soit x la distance parcourue par Lucie à vélo. Dans le diagramme suivant, P est le point de départ, Q est l'endroit où le vélo est laissé et R est le point d'arrivée.



Le temps, en heures, mis par Maxime pour parcourir à pied, à la vitesse de 4 kmh^{-1} , la distance $PQ = x$ est $\frac{x}{4}$.

Le temps, en heures, mis par Maxime pour parcourir à vélo, à la vitesse de 10 kmh^{-1} , la distance $QR = 22,5 - x$ est $\frac{22,5-x}{10}$.

Le temps, en heures, mis par Lucie pour parcourir à vélo, à la vitesse de 8 kmh^{-1} , la distance $PQ = x$ est $\frac{x}{8}$.

Le temps, en heures, mis par Lucie pour parcourir à pied, à la vitesse de 5 kmh^{-1} , la distance $QR = 22,5 - x$ est $\frac{22,5-x}{5}$.

On en déduit l'équation : $\frac{x}{4} + \frac{22,5-x}{10} = \frac{x}{8} + \frac{22,5-x}{5}$ soit en réduisant au même dénominateur dans les deux membres de l'équation : $\frac{10x+4(22,5-x)}{40} = \frac{5x+8(22,5-x)}{40}$ soit $10x + 90 - 4x = 5x + 180 - 8x$ soit $9x = 90$ soit $x = 10$.

Lucie a donc utilisé le vélo pendant $\frac{10}{8}$ soit 1h15. Maxime a marché pendant $\frac{10}{4}$ soit 2h30 avant de prendre le vélo. Le vélo est donc resté inutilisé pendant 1h15.

Exercice 6

Sentant sa fin arriver, un vieillard appelle ses enfants à son chevet afin de leur partager sa fortune. Il demande au plus vieux de prendre une pièce d'or de son coffre et le dixième du reste. Après que l'aîné s'est servi, le père demande au deuxième plus âgé de ses enfants de prendre deux pièces d'or et le dixième du reste. Il continue ainsi avec le k -ième plus âgé des enfants auquel il demande de prendre k pièces d'or et le dixième du reste.

Le dernier enfant reçoit seulement le reste du coffre.

Si les enfants ont tous reçu la même quantité d'or, alors combien d'enfants avait le vieillard et combien d'or chacun a-t-il reçu ?

Soit f le nombre de pièces d'or du vieillard et soit p la part commune, en pièces d'or, de chaque enfant.

En ce qui concerne l'aîné, $p = 1 + \frac{f-1}{10}$ et, en ce qui concerne le cadet, $p = 2 + \frac{f-p-2}{10}$.

La première équation s'écrit $10p = 10 + f - 1$ soit $f = 10p - 9$.

En reportant dans la deuxième équation, on obtient, $p = 2 + \frac{10p-9-p-2}{10}$ soit $10p = 20 + 9p - 11$

soit $p = 9$ et on en déduit que $f = 81$.

Exercice 7

1. Soit m et n deux entiers naturels. Développer le carré $(m + n + 1)^2$.
2. Démontrer qu'il n'existe pas d'entiers naturels m, n, p tels que $(m + n + 1)^2 + (n + p + 1)^2 = (m + p + 1)^2$.
3. En déduire qu'il n'existe pas d'entiers naturels impairs a, b, c tels que $(a + b)^2 + (b + c)^2 = (a + c)^2$.

1. $(m + n + 1)^2 = m^2 + n^2 + 2mn + 2m + 2n + 1$

2. $(m + n + 1)^2 + (n + p + 1)^2 = (m + p + 1)^2$

s'écrit $m^2 + n^2 + 2mn + 2m + 2n + 1 + n^2 + p^2 + 2np + 2n + 2p + 1 = m^2 + p^2 + 2mp + 2m + 2p + 1$
soit $2n^2 + 4n + 2(mn + np - mp) + 1 = 0$

ce qui est impossible car $2n^2 + 4n + 2(mn + np - mp) + 1 = 2(2n^2 + 2n + mn + np - mp) + 1$ et le nombre $2n^2 + 2n + mn + np - mp$ est un entier. Cela voudrait dire que 0 est un nombre impair...

3. Si les nombres a, b, c sont impairs et vérifient $(a + b)^2 + (b + c)^2 = (a + c)^2$, alors il existe trois nombres entiers naturels m, n, p tels que :

$$a = 2m + 1, b = 2n + 1, c = 2p + 1$$

et $(2m + 1 + 2n + 1)^2 + (2n + 1 + 2p + 1)^2 = (2m + 1 + 2p + 1)^2$ soit $(2m + 2n + 2)^2 + (2n + 2p + 2)^2 = (2m + 2p + 2)^2$ soit (en divisant les deux membres de l'égalité par 4), $(m + n + 1)^2 + (n + p + 1)^2 = (m + p + 1)^2$.

D'après le 2., cela est impossible.

Exercice 8

1. Calculer, pour tout entier naturel n , le nombre $S_n = n^2 - (n + 1)^2 - (n + 2)^2 + (n + 3)^2$.
2. En déduire la somme S obtenue en alternant, après 1, deux termes négatifs puis deux termes positifs $1^2, -2^2, -3^2, 4^2, 5^2, -6^2, -7^2, 8^2, 9^2, \dots$ pour avoir au total 2 025 termes.

1. Pour tout entier naturel n ,

$$S_n = n^2 - (n + 1)^2 - (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = n^2 - (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9)$$

soit après développement et réduction $S_n = 0n^2 + 0n + 4 = 4$.

2. La somme S peut s'écrire

$$S = (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + (9^2 - 10^2 - 11^2 + 12^2) + \dots$$

D'après la question 1., chaque somme entre parenthèse vaut 4. D'autre part, $2\,025 = 4 \times 506 + 1$.

La somme S vaut donc $S = 506 \times 4 + 2\,025^2 = 4\,102\,649$.

Géométrie

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en C et soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

On suppose que $CH = 15$ et que le périmètre du triangle ABC est égal à 75.

Déterminer la longueur de l'hypoténuse du triangle ABC.

On pose $a = BC, b = CA, c = AB$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C, on obtient : $a^2 + b^2 = c^2$

D'autre part, l'aire du triangle ABC peut se calculer de deux façons différentes, ce qui donne l'égalité :

$$ab = c \times CH = 15c.$$

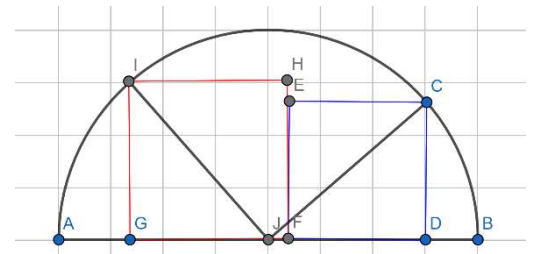
Enfin, comme le périmètre du triangle ABC est égal à 75, on peut écrire $a + b = 75 - c$ ce qui entraîne, en élevant au carré de chaque côté de cette égalité : $a^2 + 2ab + b^2 = 75^2 - 150c + c^2$

soit, puisque $ab = 15c, c^2 + 15c = 75^2 - 150c + c^2$ ce qui se simplifie en $180c = 75^2$ soit $c = \frac{125}{4} = 31,25$.

Exercice 2 – Deux carrés dans un demi-disque

Les carrés CDFE et FGIH ont deux côtés à support commun, [DF] et [FG] sont supportés par le diamètre [AB] du demi-disque, [EF] et [FH] sont supportés par une perpendiculaire au diamètre, de plus les points C et I appartiennent au demi-cercle. Par ailleurs, les segments joignant le centre J du cercle aux sommets des carrés situés sur le cercle sont perpendiculaires.

Montrer que la somme des aires des carrés est le carré du rayon du demi-cercle.



Appelons a et b les côtés des carrés CDFE et FHIG respectivement et considérons que le rayon du demi-disque est 1. Appelons x et y les longueurs JD et JG. Le théorème de Pythagore fournit : $a^2 + x^2 = 1$ d'une part, $b^2 + y^2 = 1$ d'autre part.

Comme $x + y = a + b$, il s'ensuit que $a^2 - b^2 = y^2 - x^2$ et $(a + b)(a - b) = (y + x)(y - x)$.

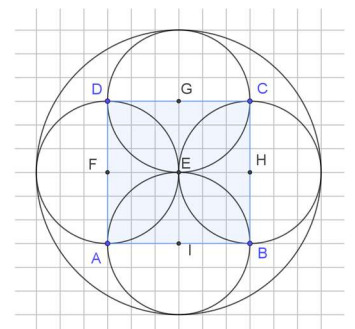
Mais $x + y = a + b$ (rappelons que $JD + JG = FD + FG$). Donc $a - b = y - x$

De là, on déduit que $a = y$ et $b = x$. Le théorème de Pythagore fournit $a^2 + x^2 = 1$, comme dit plus haut et cette égalité peut être lue comme l'affirmation que la somme des aires des carrés est le carré du rayon.

Exercice 3 – L'art du vitrail

À partir d'un carré de côté 6 cm, on a construit 4 cercles dont les côtés du carré sont des diamètres et un cercle de centre le centre du carré et de rayon le côté du carré. On fait ainsi apparaître trois types de zones : zone comprise entre le grand cercle et deux petits (1), zone intersection de deux petits disques (2), demi-disque diminué de l'empreinte de deux petits (3).

Quelles sont les aires des zones de chaque type ?



On peut commencer par le type 2, composé de deux segments circulaires d'angle au centre droit. Chacun de ces segments a pour aire la différence entre l'aire du quart de disque et l'aire d'un triangle rectangle isocèle de côté le demi-côté du carré : $Aire (zone 2) = 2 \times \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} \right) = 9\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

L'aire d'une zone de type 3 est la différence entre l'aire d'un demi petit disque et la somme des aires de quatre segments circulaires comme mentionnés ci-dessus : $Aire(zone3) = \frac{9\pi}{2} - 4 \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} \right) = 18 - \frac{9\pi}{2}$

Pour la zone 1, on peut y voir un quart du grand disque diminué de deux demi petits disques, aire à laquelle il faut ajouter 2 fois l'aire du segment circulaire prélevée une fois de trop :

$$Aire(zone1) = 9\pi - 2 \times \frac{9\pi}{2} + 2 \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} \right) = 9\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

On constate que les zones 1 et 2 voisines forment un « champignon » dont le chapeau et le pied ont la même aire.

Exercice 4 - Bissectrice

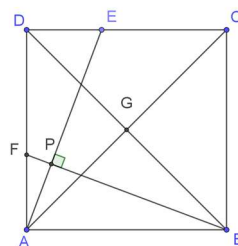
Définition : on appelle bissectrice d'un angle d'un triangle la droite qui passe par le sommet de l'angle et qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

On considère un carré ABCD. Sur le côté [CD] on place un point E.

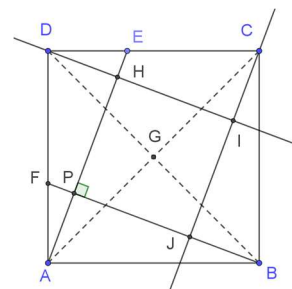
La perpendiculaire à la droite (AE) passant par B coupe cette droite en P et coupe la droite (AD) en F.

On appelle G le point d'intersection des diagonales du carré.

Montrer que la droite (GP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BPE}$.



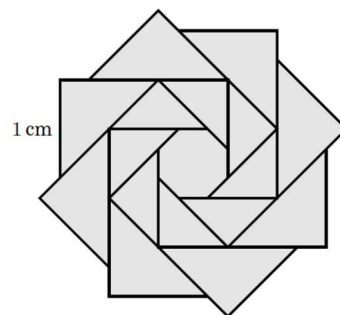
La droite symétrique de (BF) dans la symétrie centrale de centre G est la parallèle à (BE) passant par D. La droite symétrique de (AE) dans la symétrie centrale de centre G est la parallèle à (AE) passant par C. Le quadrilatère PHJI a ses angles droits et ses côtés de même longueur (à cause de la symétrie centrale) et ses sommets P et J d'une part, H et I d'autre part sont symétriques par rapport à G. C'est donc un carré dont G est le centre. Sa diagonale (GP) est la bissectrice de son angle en P.



Exercice 5 – Le tourbillon

La figure ci-contre est constituée d'un assemblage de huit rectangles identiques auxquels il manque un des grands côtés. Ces huit rectangles sont encastrés les uns dans les autres, formant ainsi des triangles tous isocèles.

Déterminer l'aire de cette figure sachant que le petit côté de chacun des rectangles mesure 1 cm ?

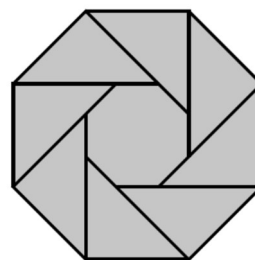


On considère déjà les 8 grands triangles isocèles situés à l'extérieur de la figure. Ces triangles sont de plus rectangles et la somme de leurs aires est égale à la somme des aires de 4 carrés de côté 1 cm. Cette somme vaut 4 cm^2 .

Une fois ces triangles « retirés », il reste un octogone régulier dont chaque côté pour longueur la moitié de la longueur, en cm, l de l'hypoténuse des triangles isocèles rectangles déjà considérés. D'après le théorème de Pythagore, $l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $l = \sqrt{2}$.

Les côtés de l'octogone ont donc pour longueur $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$.

Pour calculer l'aire de l'octogone, on l'inscrit dans un carré $\mathcal{C}$ en y ajoutant 4 petits triangles isocèles rectangles dont l'hypoténuse a pour longueur $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$.



La longueur c des côtés de l'angle droit de ces petits triangles est telle que $c^2 + c^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $c^2 = \frac{1}{4}$

soit $c = \frac{1}{2}$. Le côté du carré $\mathcal{C}$ a donc pour longueur $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ et son aire vaut $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2$.

L'aire de chaque petit triangle isocèle rectangle vaut $\frac{c^2}{2} = \frac{1}{8}$. Ils sont au nombre de quatre.

L'aire de l'octogone vaut donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 - 4 \times \frac{1}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

Au final, l'aire du tourbillon est égale à $4 + 1 + \sqrt{2} = 5 + \sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Exercice 6

Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est isocèle.

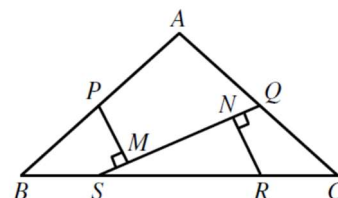
On suppose que $AB = AC = 10$ et $BC = 12$.

Les points S et R sont sur le segment $[BC]$ de telle façon que les nombres BS, SR, RC sont dans le ratio 1: 2: 1.

Les points P et Q sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$.

Les points M et N sont les projetés orthogonaux respectivement de P et R sur la droite (SQ) .

Déterminer la distance MN .



Soit D le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC . Comme ce triangle est rectangle isocèle en A , D est le milieu de $[BC]$. De plus dans le triangle ABD rectangle en D , d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Comme P et Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$, la droite (PQ) est parallèle à la droite (AC) et coupe $[AD]$ en son milieu.

De plus, $BC = 12$ et, comme les nombres BS, SR, RC sont dans le ratio 1: 2: 1, $SR = 2BS = 2RC$ d'où $SR = 6 = 2SD$ et $BS = RC = 3$. Les points S et R sont donc les milieux respectifs de $[BD]$ et $[DC]$. On en déduit que les droites (PS) et (QR) sont parallèles à (AD) et donc perpendiculaires à (BC) .

On obtient donc la figure ci-contre dans laquelle le quadrilatère $PQRS$ est un rectangle.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle QRS rectangle en R :

$$SQ^2 = SR^2 + QR^2 = 6^2 + 4^2 = 52 \text{ donc } SQ = \sqrt{52}.$$

En exprimant de deux façons différentes l'aire du triangle QRS , on obtient :

$$\frac{4 \times 6}{2} = \frac{SQ \times NR}{2} = \frac{\sqrt{52} \times NR}{2} \text{ soit } NR = \frac{24}{\sqrt{52}}.$$

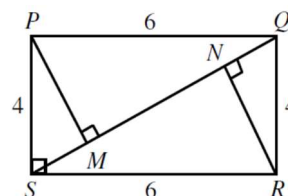
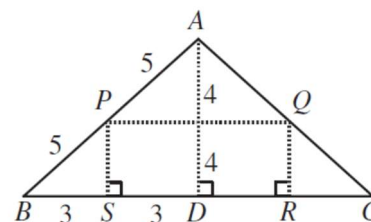
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle QRN rectangle en N :

$$NQ^2 = QR^2 - NR^2 = 4^2 - \left(\frac{24}{\sqrt{52}}\right)^2 = 16 - \frac{576}{52} = 16 - \frac{144}{13} = \frac{16 \times 13 - 144}{13} = \frac{64}{13} \text{ d'où } NQ = \sqrt{\frac{64}{13}}.$$

$$\text{symétrie, } MS = \sqrt{\frac{64}{13}}. \text{ On en déduit que } MN = SQ - MS - NQ = \sqrt{52} - 2\sqrt{\frac{64}{13}}.$$

Remarque : les propriétés de la racine carrée permettent de simplifier cette expression car

$$\sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13} \text{ et } \sqrt{\frac{64}{13}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \text{ d'où } MN = 2\sqrt{13} - 2 \times \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{2 \times 13 - 16}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$



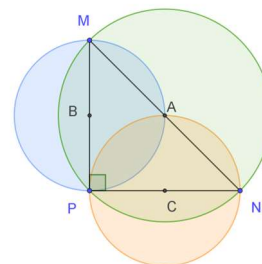
Exercice 7 – Recouvrements

On donne un triangle rectangle isocèle MNP d'hypoténuse $[MN]$. Les côtés de l'angle droit mesurent 5.

Les segments $[MN]$, $[MP]$ et $[NP]$ sont les diamètres de trois disques colorés. On note A , B et C leurs milieux respectifs.

On s'intéresse à la partie du plan qui a été colorée au moins deux fois.

Quelle est son aire ?



On s'intéresse au disque de centre C. La partie de ce disque qui ne reçoit qu'une couleur est la lunule entourée par les arcs notés p et k ci-contre. L'aire de cette lunule est la différence entre l'aire du demi-disque et l'aire du segment circulaire défini par la corde [PN], cette dernière est elle-même la différence entre l'aire du secteur du disque de centre A défini par les rayons [AP] et [AN] :

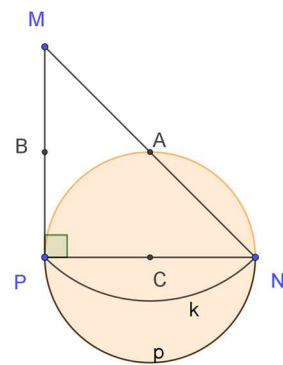
$$\mathcal{C} = \frac{25}{2}\pi - \left(\frac{25}{4}\pi - \frac{25}{8}\right) = \frac{25}{4}\pi + \frac{25}{8}$$

Deux des disques jouant des rôles analogues, avec le même rayon, si on appelle $\mathcal{B}$ l'aire de la lunule « de gauche », on a $\mathcal{B} + \mathcal{C} = \frac{25}{2}\pi + \frac{25}{4}$. Il reste à déterminer l'aire des segments circulaires de centres B et C déterminés par les cordes [AM] et [AN].

Leur aire commune est la différence entre l'aire de secteurs circulaires d'angle au centre droit et l'aire de triangles rectangles isocèles de côté $\frac{5}{2}$, soit $\mathcal{D} = \frac{25}{16}\pi - \frac{25}{8}$.

Au total, nous cherchons la somme des aires des deux lunules à laquelle ajouter la différence entre l'aire du demi-disque de centre A et la somme des aires de deux secteurs circulaires dont nous venons de parler.

Finalement, $\mathcal{E} = 25\pi - 2 \times \left(\frac{25}{16}\pi - \frac{25}{8}\right) + \frac{25}{2}\pi + \frac{25}{4} = \frac{275}{8}\pi + \frac{25}{4}$



Logique, dénombrement, probabilités

Exercice 1

De combien de façons différentes peut-on obtenir 207€ avec des pièces de 2€ et des billets de 5€ ?

Avec uniquement des billets de 5 €, on ne peut obtenir que des sommes qui sont multiples de 5, c'est-à-dire dont le chiffre des unités est 0 ou 5. Si la somme a pour chiffre des unités 0, en y ajoutant des pièces de 2 €, on obtiendrait des sommes paires (donc pas 207). La somme obtenue avec les billets de 5 € ne peut donc qu'avoir 5 comme chiffres des unités.

Réciproquement, à partir de toute somme inférieure à 207 et multiple de 5 et dont le chiffre des unités est 5, on peut obtenir 207 en ajoutant des pièces de 2 €.

Les multiples de 5 dont le chiffre des unités est 5 sont 5, 15, 25 ? ..., 195, 205. Leur nombre est le même que celui des nombres 0, 1, 2, ..., 19, 20 à savoir 21.

Il y a donc 21 multiples de 5 auxquels on peut ajouter des multiples de 2 pour obtenir 207.

Il y a donc 21 façons de former une somme de 207 € en n'employant que des pièces de 2 € et des billets de 5 €.

Exercice 2

Déterminer le nombre de triangles non aplati de périmètre 57 et dont les longueurs des côtés sont des entiers x, y, z tels que $x < y < z$.

On sait que $x + y + z = 57$ et comme le triangle n'est pas aplati $x + y < z$ puisque z est la plus grande longueur de côté. On en déduit que la valeur maximale de z est un entier inférieur à $\frac{57}{2}$ donc z vaut au maximum 28.

Si $z = 28$ alors $x + y = 29$ et il y a autant de couples d'entiers (x, y) solutions que d'entiers compris x entre 2 et 14 (pour avoir $x < y < z$) soit 13 solutions.

De même si $z = 27$ alors $x + y = 30$ et x varie alors de 4 à 14, ce qui donne 11 solutions.

Si $z = 26$ alors $x + y = 31$ et x varie alors de 6 à 15, ce qui donne 10 solutions.

Si $z = 25$ alors $x + y = 32$ et x varie alors de 8 à 15, ce qui donne 8 solutions.

Si $z = 24$ alors $x + y = 33$ et x varie alors de 10 à 16, ce qui donne 7 solutions.

Si $z = 23$ alors $x + y = 34$ et x varie alors de 12 à 16, ce qui donne 5 solutions.

Si $z = 22$ alors $x + y = 35$ et x varie alors de 14 à 17, ce qui donne 4 solutions.

Si $z = 21$ alors $x + y = 36$ et x varie alors de 16 à 17, ce qui donne 2 solutions.

Si $z = 20$ alors $x + y = 37$ et x vaut uniquement 18.

Au total, le nombre de triangles solutions est donc $13 + 11 + 10 + 8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 61$.

Exercice 3

Trois élèves ont répondu à un questionnaire de trois questions. Voici le tableau rassemblant leurs réponses :

	Question 1	Question 2	Question 3
Elève A	15	36	24
Elève B	20	38	24
Elève C	15	54	24

Sachant que chaque élève a répondu correctement à exactement 2 questions, quelle est la somme des réponses correctes aux trois questions.

Chaque élève a répondu correctement à exactement 2 questions signifie que chaque élève a répondu incorrectement à exactement 1 question.

Si la réponse correcte à la question 3 n'est pas 24 alors chaque élève répond incorrectement à cette question et doit donc répondre correctement aux deux autres questions, en particulier à la question 2. Ceci est incompatible avec le fait que les réponses données à cette question sont toutes différentes. On en déduit que 24 est la réponse correcte à la question 3 et que chaque élève a répondu correctement à exactement une autre question.

Si la réponse correcte à la question 1 n'est pas 15 alors les élèves A et C ont répondu correctement à la question 2, ce qui est incompatible avec le fait que leurs réponses à cette question sont différentes. Donc 15 est la réponse correcte à la question 1.

Les élèves A et C ont déjà deux réponses correctes. Leurs réponses à la question 2 sont donc fausses. Par conséquent, 38 est la réponse correcte à la question 2.

La somme des réponses correctes est donc $S = 15 + 38 + 24 = 77$

Exercice 4

Un tiroir contient 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes bleues, 2 paires de chaussettes blanches et aucune autre chaussette.

Pour faire sa valise, Maxime choisit successivement et au hasard 3 paires de chaussettes dans le tiroir.

Quelle est la probabilité que ces paires ne soient pas constituées de chaussettes toutes de la même couleur ?

La probabilité cherchée est égale à $1 - p$ où p est la probabilité que les chaussettes soient toutes de la même couleur. Cette couleur ne peut être que le noir ou le bleu.

Le choix au hasard garantit l'équiprobabilité et le tiroir contient au départ 10 paires de chaussettes.

Comme le tiroir contient 5 paires de chaussettes noires, la probabilité de choisir une paire noire pour la première paire est $\frac{5}{10}$, celle de choisir une paire noire pour la deuxième paire est $\frac{4}{9}$ et celle de choisir une paire noire pour la troisième paire est $\frac{3}{8}$. La probabilité de choisir 3 paires noires est donc $\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{60}{720}$.

De même, La probabilité de choisir 3 paires bleues est $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{720}$.

Au final, la probabilité cherchée est $1 - \left(\frac{60}{720} + \frac{6}{720}\right) = 1 - \frac{66}{720} = 1 - \frac{11}{120} = \frac{109}{120}$.

Exercice 5

Au centre-ville de Gaussville, il y a trois édifices de hauteurs différentes : l'Euclide, le Newton et le Galilée.

Un seul des énoncés suivants est vrai :

1. Le Newton n'est pas le moins élevé.
2. L'Euclide est le plus élevé.
3. Le Galilée n'est pas le plus élevé.

Classer les trois édifices dans l'ordre croissant de leur hauteur.

Puisqu'un seul des énoncés est vrai, les deux autres sont faux.

Si le 2^e énoncé est vrai alors les deux autres sont faux. On a alors : Euclide est le plus élevé et Galilée est le plus élevé, d'où une contradiction. Donc le 2^e énoncé est faux.

Si le 3^e énoncé est vrai alors les deux autres sont faux. On a alors : le Galilée n'est pas le plus élevé et l'Euclide n'est pas le plus élevé. Cela entraîne que le Newton est le plus élevé. Or, comme le 1^{er} énoncé est faux, le Newton est le moins élevé, d'où une contradiction. Le 3^e énoncé est donc faux.

Comme un seul énoncé est vrai, c'est le 1^{er} énoncé. On sait donc que le Newton n'est pas le moins élevé, que l'Euclide n'est pas le plus élevé et que le Galilée est le plus élevé.

On en déduit que, dans l'ordre croissant de leur hauteur, les trois édifices sont classés : Euclide, Newton, Galilée.

Exercice 6 – Caractère entier

Les nombres x , $\frac{14x+5}{9}$ et $\frac{17x-5}{12}$ peuvent-ils être tous les trois entiers ?

S'il en était ainsi, le nombre $3 \times \frac{14x+5}{9} - 4 \times \frac{17x-5}{12}$ serait un entier. Ce nombre s'écrit aussi $\frac{10-3x}{3} = \frac{10}{3} - x$.

S'il est entier, alors x ne l'est pas...

Exercice 7 – Au théâtre

Une rangée de 10 sièges peut être accessible par la gauche ou par la droite. Les spectateurs n'arrivant pas les premiers regardent s'il vaut mieux passer par la droite ou par la gauche pour éviter de déranger d'autres spectateurs déjà assis (occupés à mettre leur portable en mode silencieux).

Quelle est la probabilité qu'un spectateur au moins en dérange d'autres ?

Si personne n'a été dérangé à l'arrivée, il ne peut en être de même au moment de partir que si on commence par les spectateurs des sièges du bout de la rangée, il y a deux possibilités. Une fois ceux-ci partis, ce sont les deux nouveaux extrêmes qui partent, etc. Il y a donc 2^9 « bons » ordres de sortie, sur $10!$ ordres possibles. La probabilité est donc $p = 1 - \frac{2^9}{10!} \cong 0,99986$ à 10^{-5} près.

C'est pour cela qu'il faut apprendre à dire « pardon ».

Exercice 8 – Salutations

Un groupe de lycéens français a reçu un groupe de lycéens italiens. On s'est fait des politesses et à la fin de la rencontre chacun a salué chacun d'un « Au revoir ! » ou d'un « Arrivederci ! » Au total, 198 « Au revoir ! » et 308 « Arrivederci ! » ont été prononcés.

Combien y avait-il de lycéens français et combien d'italiens ?

S'il y avait n français et p italiens, chaque français a dit $n - 1$ fois « au revoir ! » à un français et p fois « au revoir ! » à un italien. Au total : $n(n - 1) + np = 198$. Chaque italien a dit $p(p - 1)$ « Arrivederci ! » à un italien et n fois à un français. Au total : $p(p - 1) + pn = 308$. En soustrayant : $(p - n)(p + n - 1) = 110$.

S'il y a N lycéens au total, par addition, on a $N(N - 1) = 506$ donc $N = 23$ (en listant les diviseurs de 506). Seul 9 et 14 conviennent.

Il y avait donc 14 italiens pour 9 français.