



ACADÉMIE  
DE VERSAILLES

Liberté  
Égalité  
Fraternité



Versailles

Lycée Marie Curie

Poissy

Lycée Charles de Gaulle

## QUEL EST LE FÉMININ DE « PRÉCURSEUR » ?

Le poète Lord Byron surnommait sa future épouse Annabella Milbanke « la princesse des parallélogrammes ». Leur vie commune fut courte et Annabella conserva près d'elle leur enfant Ada, à laquelle elle communiqua son goût pour les mathématiques.

Ada Lovelace (1815 – 1852) témoignait une certaine passion pour les sciences et techniques, et rêvait de « science poétique ». Un de ses professeurs, le grand mathématicien et logicien Augustus De Morgan, lui prêtait de grandes capacités en mathématiques. Elle rencontre Charles Babbage, concepteur du *moteur différentiel*, en 1833, et rédige des commentaires sur le fonctionnement du *moteur analytique*, dont la célèbre « note G » qui contient un programme de calcul de *nombres de Bernoulli*.

« Ce que Lovelace a vu...C'est cette transition fondamentale d'une machine qui est un calculateur de nombres à une machine pour manipuler des symboles selon des règles ... si nous recherchons et passons au crible l'histoire pour cette transition, alors cette transition a été faite explicitement par Ada en 1843 » (Doron Swade)

### **Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de seconde Désigné(es) par leurs établissements les 8 et 9 avril 2024**

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles, le lycée Charles de Gaulle de Poissy. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**



**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Nathalie SOARES, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

**Les intervenants professeurs :** Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHENIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Catherine HOUARD (Retraîtée), François LAVALLEE (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Manon LERAY (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), François L'OFFICIAL (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Rémi NIGUES (collège Auguste Renoir, ASNIERES SUR SEINE), Martine SALMON (retraîtée)

**Professeurs accompagnants :**

## Emploi du temps

Lundi 8 avril 2024

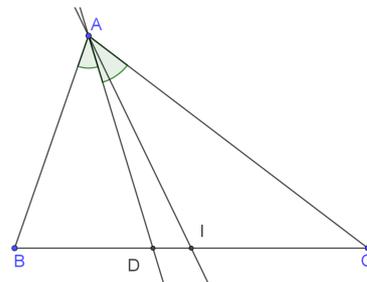
	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Poissy
10 heures	Accueil			
10 h 10	Géométrie SD	Arithmétique CD	Équations RN	Géométrie FLav.
12 h 10	Repas			12 h 15
13 heures	Dénombrement PM	Géométrie SD	Arithmétique CD	Arithmétique CH
15 h 10	Films			Quiz
15 h 50	Exposé « Calculs approchés »			Film(s)

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Poissy
10 heures	Équations MS	Dénombrement PM	Géométrie SD	Equations ML
12 heures	Repas			
12 h 50	Arithmétique CD	Équations MS	Dénombrement PM	Dénombrement FL'O
15 heures	Quiz			Film(s) Exposé « calculs approchés »

# Géométrie

## Quelques définitions

**Définition 1 :** dans un triangle ABC, on appelle médiane issue du point A la droite passant par A et par le milieu I du segment [BC]

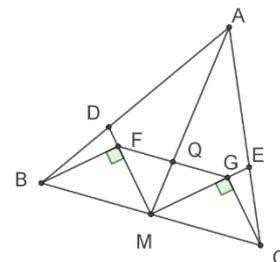


**Définition 2 :** on appelle bissectrice d'un angle  $\widehat{BAC}$  une droite qui coupe l'angle  $\widehat{BAC}$  en deux angles adjacents  $\widehat{BAD}$  et  $\widehat{DAC}$  de même mesure.

### Exercice 1 – On se retrouve sur la médiane...

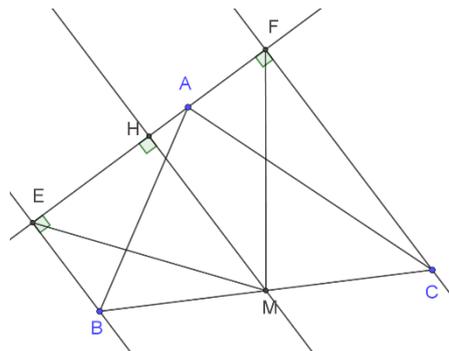
Dans le triangle ABC, le point M est le milieu de [BC] et les bissectrices des angles  $\widehat{BMA}$  et  $\widehat{CMA}$  coupent les côtés [AB] et [AC] respectivement en D et E. F et G sont les projetés de B et C sur [MD] et [ME] et Q est le point d'intersection de [FG] avec [AM].

Montrer que Q est le milieu de [FG].



### Exercice 2 – Projetés orthogonaux

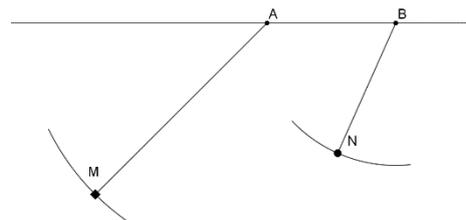
Soit ABC un triangle et  $\mathcal{D}$  une droite passant par A. On note respectivement E et F les projetés orthogonaux des points B et C sur la droite  $\mathcal{D}$ . Soit M le milieu du segment [BC]. Montrer que ME = MF.



### Exercice 3 – Les deux pendules

Aux points A et B, distants de 9 cm sur le plafond d'une salle, sont attachés deux pendules désignés par M et N, le premier avec une ficelle de 17 cm de longueur, le second avec une ficelle de 10 cm. Les pendules sont supposés évoluer dans le même plan vertical, assez longtemps et avec une assez grande vitesse initiale pour se rencontrer.

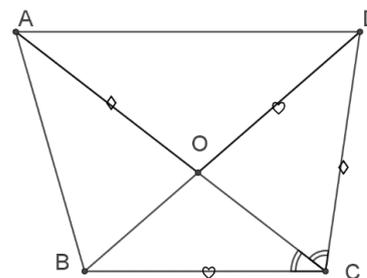
À quelle distance du plafond seront-ils à ce moment ?



### Exercice 4 – Trapèze violent

Dans la figure ci-contre (qui est évidemment fautive), les droites (AD) et (BC) sont parallèles, les longueurs BC et OD sont égales, les longueurs AO et CD sont égales et la droite (AC) est la bissectrice de l'angle  $\widehat{BCD}$ .

Combien mesure l'angle  $\widehat{ABC}$  ?



### Exercice 5 – Non, ce n'est pas un hasard

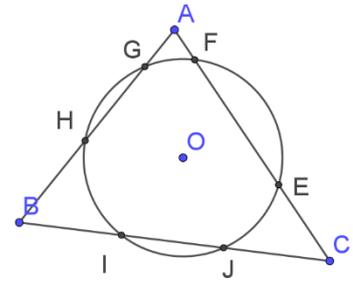
Sur les côtés du triangle ABC, sont placés les points E, F, G, H, I, J de telle

sorte que chaque côté du triangle soit régulièrement partagé :

$CE = EF = FA$ ,  $AG = GH = HB$ ,  $BI = IJ = JC$  (*la figure n'est évidemment pas juste*).

Les six points E, F, G, H, I, J sont cocycliques.

Prouver que le triangle ABC est équilatéral.



### Exercice 6 – Un peu d'espace

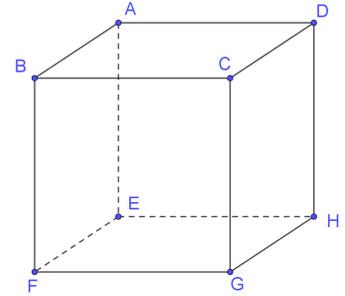
On considère un cube ABCDEFGH de côté  $a$ . On note I, J, K, L, M, N, P les milieux respectifs de [AB], [BF], [FG], [GH], [HD], [DA] et [AE].

On admet que les points I, J, K, L, M et N sont coplanaires

Ce cube est alors coupé par deux plans :

- le plan  $\mathcal{P}_1$  parallèle au plan (ABC) et passant par J ;
- le plan  $\mathcal{P}_2$  passant par I, K, L, N.

Déterminer le quotient du volume du plus petit polyèdre ainsi formé par celui du plus grand polyèdre.



# Arithmétique et nombres

## Exercice 1

Déterminer les entiers  $a$  et  $b$  strictement positifs tels que  $\frac{a}{7} + \frac{2}{b} = 1$ .

## Exercice 2 – Somme de chiffres

Quelle est la somme des chiffres de  $10^{2024} - 2024$  ?

## Exercice 3 – Éternel recommencement

On construit une suite de nombres de la façon suivante : le premier terme est  $t_1 = 6$ . Si un terme  $t$  est pair le suivant est  $\frac{t}{2}$  et si un terme  $t$  est impair, le suivant est  $3t + 1$ .

Déterminer le 2024<sup>e</sup> terme de cette suite de nombres.

## Exercice 4 – Multiples cachés

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n^5 - n$  est un multiple de 30.

## Exercice 5 – Histoire de restes

Montrer que si un entier est somme des carrés de deux entiers naturels, alors son reste dans sa division euclidienne par 4 n'est jamais 3.

## Exercice 6 – Multiplications

On considère un entier  $N$  dont l'écriture décimale comporte 6 chiffres, le chiffre le plus à gauche étant 1. Quand on multiplie  $N$  par 3, les chiffres de  $N$  sont conservés ainsi que leur ordre, hormis pour le 1 qui devient chiffre des unités. Déterminer le nombre  $N$ .

## Exercice 7 – PGCD et PPCM

Déterminer les couples  $(a, b)$  de nombres entiers strictement positifs ayant un plus grand diviseur commun égal à 4 et un plus petit commun multiple égal à 4620.

# Équations et inéquations

## Exercice 1 – Organiser ses calculs

1. Sachant que  $x$  et  $y$  sont des nombres réels strictement positifs tels que  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ . Calculer  $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2$ .
2. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a + b = 1$  et  $a^2 + b^2 = 2$ . Calculer  $a^3 + b^3$  et  $a^4 + b^4$ .

## Exercice 2 – Système non linéaire

Déterminer les réels  $x$  et  $y$  vérifiant le système (S) d'équations 
$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y^3 = 11 - x^2 \end{cases}$$

## Exercice 3

On considère une suite de nombres réels  $t_1, t_2, t_3, \dots$  tels que, pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $t_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$ . Déterminer le plus grand entier strictement positif  $n$  pour lequel la somme des  $n$  premiers termes de la suite est inférieure à 1,499.

## Exercice 4 – Longueur de tunnel

Un camion, supposé rouler à vitesse constante, traverse un tunnel. Le passager mesure le temps écoulé entre l'instant où le camion entre dans le tunnel et celui où il en est complètement sorti. Le lendemain, le même camion est attelé d'une remorque qui porte sa longueur totale de 12 m à 24 m. Il traverse le même tunnel, en réduisant sa vitesse de 20% par rapport à la veille. Le passager constate que le temps écoulé est supérieur de 50% à celui mis la veille.

Quelle est la longueur du tunnel ?

## Exercice 5 – À vélo

Chaque jour, Carla quitte le lycée à la même heure. Si elle pédale à une vitesse moyenne de 20 km/h, elle arrive à la maison à 16 h 30. Si elle pédale à une vitesse moyenne de 10 km/h, elle arrive à la maison à 17 h 15. À quelle vitesse moyenne, en km/h, doit-elle pédaler pour arriver à la maison à 17 heures ?

## Exercice 6 – Fonctions mystères

On suppose qu'il existe des fonctions  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  vérifiant les affirmations suivantes :

(\*) Il existe des entiers  $a, b, c$  où  $a > 0$ , tels que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ;

(\*\*)  $f(p) = f(q) = 17$  et  $f(p + q) = 47$  où  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers tels que  $p < q$ .

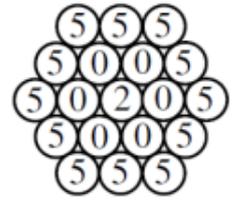
Déterminer la somme  $S$  de toutes les valeurs  $f(pq)$  possibles.

## Dénombrement – probabilités

### Exercice 1 – Choisir son chemin

En partant du 2 au centre, on peut former le nombre 2 005 en se déplaçant d'un cercle à un autre si les deux cercles se touchent.

Combien de chemins différents peut-on emprunter pour former le nombre 2 005 ?



### Exercice 2 – Partage de pommes

Au départ, Alphonse et Katrina avaient le même nombre de pommes. Katrina a donné 12 de ses pommes à Alphonse. Ensuite, Katrina a donné la moitié des pommes qui lui restaient à Alphonse. Alphonse a maintenant quatre fois autant de pommes que Katrina.

Combien de pommes Katrina a-t-elle au final ?

### Exercice 3 – Sortie scolaire

Lors d'une sortie scolaire, des activités de plein air randonnée : canoë et natation ont été proposées. Elles ont été pratiquées de la façon suivante :

- 10 élèves ont participé aux trois activités ;
- 50 % des élèves ont participé au moins à la randonnée et au canoë ;
- 60 % des élèves ont participé au moins à la randonnée et à la natation ;
- $k$  % des élèves ont participé au moins au canoë et à la natation ;
- aucun élève n'a participé à moins de deux activités.

Déterminer toutes les valeurs de  $k$  qui conviennent.

### Exercice 4 – Tournoi

Carine participe à un tournoi dans lequel aucune partie ne peut se terminer à égalité. Elle continue à jouer des parties jusqu'à ce qu'elle en perde 2, après quoi elle est éliminée et ne joue plus aucune partie.

La probabilité que Carine gagne la première partie est égale à  $\frac{1}{2}$ . Après avoir gagné une partie, la probabilité que Carine gagne la partie suivante est égale à  $\frac{3}{4}$ . Après avoir perdu une partie, la probabilité que Carine gagne la partie suivante est égale à  $\frac{1}{3}$ . La probabilité que Carine gagne 3 parties avant d'être éliminée du tournoi est égale à la fraction irréductible  $\frac{a}{b}$ .

Quelle est la valeur de  $a + b$  ?

### Exercice 5 – Sommes de chiffres

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $s(n)$  la somme des chiffres de  $n$  (dans l'écriture décimale).

Déterminer le nombre  $N$  d'entiers  $n$  tels que  $100 \leq n \leq 999$  et  $7 \leq s(n) \leq 11$ .

### Exercice 6 – Nombre d'échanges

Six amis échangent des livres dans leur club de lecture. Chaque ami a un livre qu'il donne à un ami et reçoit un livre d'un autre ami (aucune paire d'amis n'échangent leur livre l'un avec l'autre).

Combien y a-t-il de façons d'échanger les livres ?

DIAGRAM BELONGING TO NOTE D

Number of Operations	Nature of Operations	Variables for Data						Working Variables							
		<sup>1</sup> V <sub>0</sub>	<sup>1</sup> V <sub>1</sub>	<sup>1</sup> V <sub>2</sub>	<sup>1</sup> V <sub>3</sub>	<sup>1</sup> V <sub>4</sub>	<sup>1</sup> V <sub>5</sub>	<sup>0</sup> V <sub>6</sub>	<sup>0</sup> V <sub>7</sub>	<sup>0</sup> V <sub>8</sub>	<sup>0</sup> V <sub>9</sub>	<sup>0</sup> V <sub>10</sub>	<sup>0</sup> V <sub>11</sub>	<sup>0</sup> V <sub>12</sub>	<sup>0</sup> V <sub>13</sub>
		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		m	n	d	m'	n'	d'								
1	x	m	.....	.....	n'	.....	mm'	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
2	x	n	.....	.....	m'	.....	nn'	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
3	x	d	.....	.....	d'	.....	dd'	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
4	x	0	.....	.....	0	.....	0	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
5	x	0	.....	.....	0	.....	0	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
6	x	0	.....	.....	0	.....	0	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
7	-	.....	.....	.....	.....	.....	0	0	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
8	-	.....	.....	.....	.....	.....	0	0	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	-	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
10	+	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
11	+	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

$$\frac{d'm - dm'}{mn' - m'n} = y$$

