ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Lycée Marie Curie
VERSAILLES

« Le goût pour les sciences abstraites en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas ; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos mœurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés que les hommes à se familiariser avec ces recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. »

C. F. Gauss (lettre de 1807)

Sophie GERMAIN (1776-1831)

Née dans une famille à l'abri du besoin, se passionne pour les mathématiques en lisant le « *Cours de mathématiques* » d'Étienne BÉZOUT et l' « *Histoire des mathématiques* » de Jean-Étienne MONTUCLA. Sa famille finit par reconnaître sa passion et son talent, et la soutient. Signant « Monsieur LE BLANC », elle correspond avec des mathématiciens du temps, dont Joseph-Louis LAGRANGE, alors professeur à Polytechnique Elle apprend à lire le latin et le grec pour aborder certains ouvrages mathématiques. Son talent est reconnu, elle communique avec Carl-Friedrich GAUSS (*voir citation*), qu'elle recommande à la sollicitude du général PERNETY lors de la prise de Brunswick.
Elle travaille sur l'équation de Fermat $x^n = y^n + z^n$ et prouve un théorème qui marque un progrès important. Sur la question des plaques vibrantes, ses travaux, qui marquent aussi des étapes importantes, sont reçus de manière un peu chaotique par l'Académie des sciences. Ses réflexions philosophiques seront publiées après sa mort.

Stage préolympique ouvert aux lycéennes et lycéens de première désigné(es) par leurs établissements, les 23 et 24 décembre 2024

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Marion PACAUD, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

Les intervenants professeurs : Hélène COCHARD (Lycée Blaise Pascal, ORSAY), Dominique CLENET (Lycée François Villon, LES MUREAUX, Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHÉNIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE)

… Et les professeurs accompagnant leurs élèves :

Emploi du temps

Lundi 23 décembre 2024

Versailles			
	Groupe 1	***Groupe 2***	***Groupe 3***
10.00	**Accueil**		
10.10 12.10	**Nombres HC**	**Dénombrement, probabilités CD**	**Géométrie SD**
12.10	**Repas**		
12.50 14.50	**Équations Fonctions DC**	**Géométrie PM**	**Dénombrement, Probabilités CD**
15.00 17.00	**Dénombrement, probabilités SD**	**Équations Fonctions DC**	**Nombres HC**

Mardi 24 décembre 2025

Versailles			
	Groupe 1	***Groupe 2***	***Groupe 3***
9.30 11.30	**Géométrie PM**	**Nombres CD**	**Équations Fonctions EL**
11.40 12.30	**Films ou exposé**		

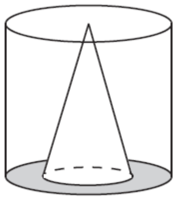
Géométrie

Exercice 1

Soit ABC un triangle dont le centre du cercle inscrit est noté I. L'image D_1 de la droite (AB) par la symétrie orthogonale s_1 d'axe (CI) et l'image D_2 de la droite (AC) par la symétrie orthogonale s_2 d'axe (BI) se coupent en un point J.
Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (BC).
(Le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point de concours des bissectrices des angles du triangle).

Exercice 2

Un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon r contient de l'eau. Un cône de révolution ayant la même hauteur h et de rayon $\frac{r}{2}$ est immergé dans l'eau, sa face circulaire reposant sur la base du cylindre comme sur la figure ci-contre.
Une fois l'immersion faite, la profondeur de l'eau est égale à la moitié de la hauteur du cylindre.
Si le cône est ensuite retiré, quelle sera la profondeur de l'eau ?

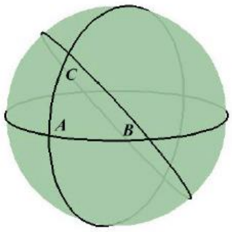


Exercice 3

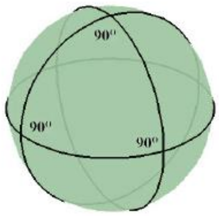
Soit ABCD un quadrilatère tel que $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90°$ et dont le périmètre vaut 224, l'aire vaut 2 205. On suppose de plus qu'un des côtés a pour longueur 7 et que les autres longueurs sont des nombres entiers.
Déterminer la somme S des carrés des longueurs des côtés du quadrilatère ABCD.

Exercice 4 – Les plateformes océaniques

Un groupe de chercheurs en océanographie possède trois plateformes A, B et C sur l'océan Pacifique contenant chacune un laboratoire.
Leurs recherches se limitent à la portion de l'océan Pacifique située à l'intérieur du triangle sphérique ABC (voir la figure ci-contre).
On sait que les angles en A, B et C mesurent respectivement 90°, 45° et 60°.
Déterminer la proportion de l'aire de la Terre que représente l'aire du triangle ABC.

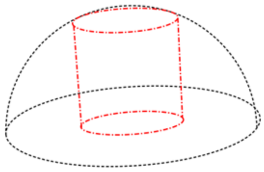


A savoir :
- Contrairement au cas des triangles dans un plan, la somme des mesures des angles d'un triangle sphérique n'est pas toujours égale à 180°. Cette somme peut varier. Par exemple dans la figure ci-contre, la somme vaut 270°.
- L'aire d'un croissant entre deux demi-grands cercles est proportionnelle à l'angle entre ces deux demi grands cercles.



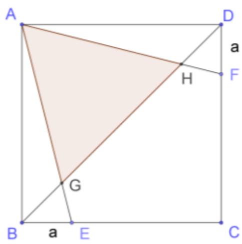
Exercice 5 – Cylindre dans une boule

Dans une demi-boule de rayon 3, on a percé un cylindre droit de rayon $\sqrt{3}$ et d'axe l'axe de la demi-boule.
Pourrait-on réaliser un percement analogue avec un cylindre droit de même axe et de même volume (de rayon différent…) ?



Exercice 6

Soit ABCD un carré.
Les points E et F sont situés sur les côtés [BC] et [CD], E à la distance a de B, F à la distance a de D.
Les droites (AF) et (AG) coupent la diagonale [BD] en H et G respectivement.
Le côté du carré est 1.
Quelle est la valeur de a si le triangle AGH a pour aire $\frac{1}{3}$?



Nombres

Exercice 1

Ecrire le plus simplement possible le nombre $N = \left(2+\sqrt{5}\right)^{2\,024}\left(2-\sqrt{5}\right)^{2\,025}$.

Exercice 2

Montrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{35n+7}{21n+4}$ est irréductible.

Exercice 3

On considère quatre entiers a, b, c, d deux à deux distincts choisis parmi les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Quelle est la plus grande valeur que le nombre $ac + bd - ad - bc$ peut prendre ?

Exercice 4

Déterminer le nombre de suites de 11 nombres réels positifs $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$ telles que $a_1 = 4, a_{11} = 1\,024$ et, pour tout entier $n \in [2{,}11]$, $a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n a_{n-1}}$.

Exercice 5

Jeanne écrit 2024 nombres naturels le long d'un cercle.
Soit n un entier naturel strictement positif. On note $n!$ le produit des entiers non nuls inférieurs ou égaux à n. Par exemple, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
Jeanne veut que les 2 024 produits de paires de nombres adjacents soient exactement l'ensemble $\{1!, 2!, \dots, 2\,024!\}$
Peut-elle y parvenir ?

Exercice 6

Un entier naturel non nul n est dit *pratique* si tout entier naturel non nul inférieur ou égal à n peut s'écrire comme la somme de diviseurs deux à deux distincts de n.
Par exemple, 6 est un entier pratique car $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 1 + 3, 5 = 2 + 3, 6 = 6$.
Montrer que si p et q sont deux entiers naturels pratiques alors pq est un entier naturel pratique.

Équations - Fonctions

Exercice 1
On note a, b, c les solutions de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$. Calculer le nombre $N = \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$.

Exercice 2
Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation $\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x$ (*)

Exercice 3
Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels (*x, y, z*), vérifiant le système $\begin{cases} xy = z - x - y \\ yz = x - y - z \\ zx = y - z - x \end{cases}$.

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions f définies de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}$ et telles que :

pour tous rationnels x et y, $f(2f(x) + f(y)) = 2x + y$. (*)

On pourra commencer par montrer que pour tous rationnels x et y, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 5
Trouver le plus grand entier k possédant la propriété suivante : quels que soient les nombres réels $x_{1,}\ x_{2,}, x_{3,} \dots, x_{2\,024}$ tels que

$$x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = \cdots = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2\,024})^2$$

il en existe au moins k qui soient égaux.

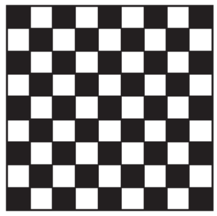
Exercice 6
Trouver tous les polynômes $P(x)$ tels que $(x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$ est un polynôme constant.

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1
On jette trois dés non pipés numérotés de 1 à 6 et on calcule la somme S des trois numéros des faces supérieures.
Déterminer la probabilité que $S > 5$.

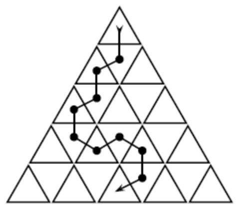
Exercice 2
Combien y a-t-il d'entiers n tels que $100 \leq n \leq 999$ dont la somme des chiffres $s(n)$ est telle que $7 \leq s(n) \leq 11$?

Exercice 3



Sur un damier on dit que des tours sont *attaquantes* si elles se trouvent dans la même rangée ou dans la même colonne du damier.
De combien de manières peut-on placer 8 tours non attaquantes sur un damier 9×9 (voir figure ci-contre), de telle façon ce que toutes ces 8 tours se retrouvent sur des carrés de la même couleur ?

Exercice 4



On considère un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n. Ce triangle est divisé en triangles équilatéraux de côté 1 (voir figure ci-contre pour $n = 5$).
On note C_n le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusqu'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune, que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure).
Déterminer $C_{2\,024}$.

Exercice 5
On déplace un pion au hasard sur les 9 cases d'un plateau 3×3. Les cases sont numérotées comme sur la figure ci-contre.
Au temps 0, le pion est sur la case 1 puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une case voisine, les mouvements diagonaux étant interdits.
Dans chaque position du pion, les probabilités d'être déplacées vers une des cases voisines sont égales.
Déterminer la probabilité que la case 3 soit visitée avant la case 9.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Exercice 6
Un programme génère des nombres aléatoires entre 0 et 1. Le programme est conçu de telle sorte que pour tout *x* de 0 à 1, la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que x est trois fois plus grande que celle qu'il génère un nombre plus petit que $\frac{x}{4}$.
De plus, la probabilité qu'il génère un nombre supérieur ou égal à x est égale à la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $(1 - x)$.
Calculer la probabilité que ce programme nous donne un nombre strictement plus petit que $\frac{1}{21}$.