ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Lycée Marie Curie
VERSAILLES

Lycée Camille Pissarro
PONTOISE

Comment écrire les nombres ?

Le système d'écriture (indien puis) arabe pénètre en Europe au Xe siècle. Un système d'écriture des fractions décimales, et donc des nombres décimaux, est publié en 1585 dans *La Disme* de Simon Stevin (1548 – 1620), ingénieur, linguiste, physicien, mathématicien et musicien flamand (on lui doit la gamme tempérée, un parallélogramme des forces et une consolidation de la langue néerlandaise). Les jetons et des mesures d'usage régional ou catégoriel subsistent au moins jusqu'à la Révolution française et la mise en place du système décimal.
La naissance du calcul par les machines suscite de nouvelles recherches, et Algirdas Antanas Aviziénis (né en 1932), informaticien lituanien professeur à UCLA propose un système à chiffres signés, évitant la propagation de retenues.

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens des classes de seconde – 24 et 25 avril 2023

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première début janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le centre INRIA de Saclay-Île de France et le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspectrices et inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christoph VITALIS, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les intervenants professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHÉNIN (Collège Jean Jaurès, POISSY), Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Laurent GRIERE (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), François LAVALLEE (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), François L'OFFICIAL (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES)

Professeurs accompagnants : Caroline BODIN-TOUZERY, Cécile HECHT (Lycée Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC)

Emploi du temps
Lundi 24 avril 2023

Pontoise		***Versailles***			
10	**Géométrie** **LG**	10	**Arithmétique** **SM**	**Géométrie** **PMo**	**Équations** **FLa**
12.10		12.10	**Repas**		
13.10	**Équations** **FL**	13.10	**Équations** **Fla**	**Arithmétique** **SM**	**Dénombrement** **CD**
15.20	**Quiz**	15.20	**Quiz** **CD**	**Quiz** **SD**	**Quiz** **PMo**

Mardi 25 avril 2023

Pontoise		***Versailles***			
		10	**Calculs approchés** **PMi**		
10	**Dénombrement** **BB**	11	**Géométrie** **PMo**	**Dénombrement** **SD**	**Arithmétique** **CD**
12. 10		13	**Repas**		
13.10	**Arithmétique** **CH**	14	**Dénombrement** **SD**	**Équations** **FLa**	**Géométrie** **PMo**
15.20	**Calculs approchés** **PMi**	16	**Film**		

Arithmétique et nombres

1. Montrer que tout nombre premier strictement supérieur à 3 est un suit ou précède immédiatement dans la suite des entiers un multiple de 6.

2. Déterminer un nombre entier strictement positif x de quatre chiffres (le chiffre des milliers étant non nul) tel que si y désigne le nombre écrit en retournant les chiffres de x alors $y = 4x$.

3. Un *alphamétique* est un petit casse-tête mathématique qui consiste en une équation où les chiffres sont remplacés par des lettres (le même chiffre ne peut être représenté par deux lettres différentes, une lettre représente toujours le même chiffre et un nombre ne doit jamais commencer par zéro). Le résoudre consiste à trouver quelle lettre correspond à quel chiffre pour que l'équation soit vérifiée.
Résoudre l'alphamétique suivant : AMQMA × 6 = LUCIE.

4. Un triangle rectangle est appelé pythagoricien si ses trois côtés sont des nombres entiers.
Démontrer que si un nombre premier $p > 2$ divise le périmètre d'un triangle rectangle pythagoricien, alors p divise au moins l'un des deux côtés de l'angle droit.
(On admettra que si p est un nombre premier diviseur d'un produit d'entiers ab alors il divise a ou il divise b)

5. Soit m et n deux entiers strictement positifs tels que $3m^3 = 5n^5$.
a. Montrer que 3 et 5 sont des diviseurs de m et n.
(On admettra que si p est un nombre premier diviseur d'un produit d'entiers ab alors il divise a ou il divise b)
b. Déterminer la plus petite valeur possible de $m + n$.

6. Un nombre Pretti est un entier strictement positif de sept chiffres tel que :
- L'entier formé par ses trois chiffres les plus à gauche est un carré parfait. (1)
- L'entier formé par ses quatre chiffres les plus à droite est un cube parfait. (2)
- Son chiffre des dizaines de mille est égal à celui des unités. (3)
- Son chiffre des milliers n'est pas égal à zéro. (4)

Combien y a-t-il de nombres Pretti ?

7. Le système d'Aviziénis
Dans une note oubliée en 1840 dans les *Comptes rendus de l'académie des sciences*, Augustin-Louis Cauchy propose un système d'écriture des nombres entiers utilisant des chiffres signés. En 1961, l'informaticien Algirdans Antanas Aviziénis, qui ne connaissait pas la proposition de Cauchy, décrit un système plus général.

Si on utilise les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}$, la suite des premiers entiers naturels peut s'écrire :
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 1\bar{4}, 1\bar{3}, 1\bar{2}, 1\bar{1}, 10, etc$. Le chiffre signé est le nombre qu'il faut ôter de la dizaine située plus à gauche.
a. Comment écrire 1 789 ? Quelles sont, dans le système décimal ordinaire, les écritures des nombres que le système de Cauchy-Aviziéns écrit $2\bar{3}\bar{1}$ et $3\bar{4}\bar{4}$?
b. On pose les additions comme à l'accoutumée, mais il faut prendre garde aux retenues, qui peuvent être négatives.
Deux exemples :

	3	$\bar{4}$	2		3	$\bar{5}$	$\bar{4}$
+	1	3	$\bar{3}$		5	4	$\bar{4}$
=				=			

Géométrie plane

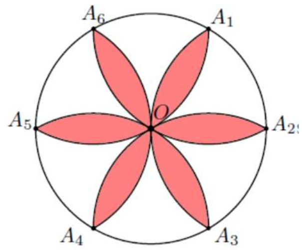
1. Autour du triangle équilatéral

a. Montrer que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b. Montrer que le centre du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral est situé au tiers de chaque hauteur en partant de la base.

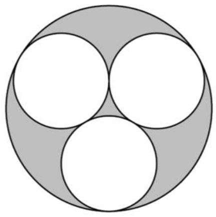
2. Calculs d'aires

a. Sur la figure ci-contre, les six points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sont régulièrement répartis sur le cercle et déterminent six demi-cercles passant par le centre O du cercle.
La rosace obtenue comporte donc six pétales.
Déterminer l'aire de la figure formée par ces six pétales sachant que le rayon du cercle est égal à 10.



b. Sur la figure ci-contre, on a représenté le dessus d'une toupie à main.
Les courbes entre deux points sont tous des arcs de cercle de rayon 1.
En leur point de contact, les tangentes aux deux arcs sont confondues.
La toupie est supposée bien équilibrée et présente donc trois axes de symétrie.
Déterminer l'aire de cette figure.

c. On inscrit trois cercles de rayon 1 dans le plus petit cercle possible de manière à ce que les trois cercles soient deux à deux tangents.
Déterminer l'aire de la région grisée.

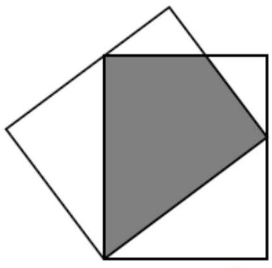


3. On considère un cercle et un point P extérieur au cercle. On trace toutes les droites passant par P et sécantes au cercle en deux points, qu'on note M et N.
Montrer que les milieux des segments [MN] sont tous situés sur un même cercle à déterminer.

4. Soit ABC un triangle équilatéral de hauteur 1. Un cercle de rayon 1 et de centre O situé du même côté de (AB) que C roule le long du segment [AB].
Montrer que l'arc du cercle à l'intérieur du triangle a toujours la même longueur.

5. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 40°$ et $\widehat{ABC} = 60°$. Les points D et E sont les points situés respectivement sur [AC] et [AB] tels que $\widehat{CBD} = 40°$ et $\widehat{BCE} = 70°$. F est le point d'intersection des droites (BD) et (CE).
Montrer que la droite (AF) est perpendiculaire à la droite (BC).

6. Élodie possède deux cartons rectangulaires de mêmes dimensions. Ces dimensions sont des nombres entiers.
La longueur des cartons est strictement supérieure à leur largeur.
Élodie superpose les deux cartons comme sur la figure ci-contre.
Elle réalise alors que l'aire du quadrilatère formé par la superposition des deux cartons (partie grisée de la figure) est un nombre entier.
Quelle est la hauteur minimale que pourraient avoir ces cartons ?



Équations et inéquations

1. Soit x, y et z trois réels non nuls tels que $xy + yz + zx = 0$. Calculer la somme $S = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}$.

2. On suppose que x, y et z trois réels tels que $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 7 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15 \end{cases}$. Déterminer la valeur de xyz.

3. Montrer que $\frac{1}{2\,023} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots \times \frac{2\,019}{2\,020} \times \frac{2\,021}{2\,022} < \frac{1}{44}$

4. Démontrer que pour tous nombres strictement positifs a, b, c, $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$.
(on pourra déjà démontrer que pour tous réels x et y, $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$).

5. On suppose que des nombres réels a et b vérifient l'égalité $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b} \times \sqrt{b^2+a}$.
Déterminer alors la valeur de $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}$

6. On dit qu'une fonction f de **R** dans **R** admet un point *fixe* a lorsque $f(a) = a$.
Déterminer tous les triplets possibles (a, n, p) de nombres tels que a est un nombre réel, n et p sont des nombres entiers et les fonctions (distinctes) f et g, de **R** dans **R,** ont toutes deux le même point fixe a et sont telles que, pour tout réel x, $f(x) = nx + 4$ et $g(x) = 4x + p$.

7. Soit un triangle EFG rectangle en E. On pose $x = EF, y = EG, z = FG$.
Calculer l'aire A et le périmètre P du triangle sachant que $P = 4A$ et $\frac{x^4+y^4+z^4}{8} = 64 - A^2$.

Dénombrement et probabilités

1. Petits cadeaux gourmands

Une petite boîte de chocolats contient 4 morceaux de chocolat placés côte à côte sur une seule ligne.
Il y a plusieurs sélections de saveurs pour les chocolats et chaque boite est confectionnée en choisissant au hasard la saveur de chaque chocolat.
Calculer le nombre de saveurs qui assurera que la probabilité de ne pas avoir deux chocolats de même saveur qui se touchent soit supérieure ou égale à 0,512.

2. Les gros bras

On organise un tournoi de bras de fer entre Alexis et Gabriel. Le tournoi comporte autant de rondes que nécessaire, le gagnant étant le premier qui parvient à gagner 2 rondes de plus que son adversaire.
On suppose que chaque rende se termine par la victoire d'un des adversaires.
On estime que la probabilité que Gabriel gagne une ronde est $\frac{2}{3}$.
Quelle est la probabilité que Gabriel gagne le tournoi ?

3. Soustraction

Les faces d'un dé juste sont numérotées de 1 à 6. Ruby et Sam jettent chacun le dé. Ensuite, Sam soustrait le nombre qu'il a obtenu de celui qu'a obtenu Ruby.
Quelle est la probabilité que le résultat de cette soustraction soit un nombre négatif ?

4. L'ombre et la lumière

Dans la Figure 1 ci-dessous, trois points non ombrés sont disposés de manière à former un triangle équilatéral. La Figure 2 est formée en disposant trois copies de la Figure 1 de manière à former le contour d'un triangle équilatéral plus grand, puis en remplissant l'espace vide résultant avec 1 point ombré. Pour chaque entier $n > 2$, la Figure n est formée en disposant trois copies de la Figure $n - 1$ de manière à former le contour d'un triangle équilatéral plus grand, puis en remplissant l'espace vide résultant au centre avec un triangle inversé de points ombrés.

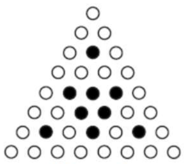


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Quelle est la plus petite valeur de n telle que la Figure n comprend au moins 100 000 points ombrés ?
(On admet que pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$)

5. Dignes d'un don

n personnes sont assises autour d'une table. On les désigne par $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$. Au début du processus, des pièces de monnaie toutes identiques leur sont distribuées, de telle sorte que P_1 possède une pièce de plus que P_2, P_2 une pièce de plus que P_3, etc., P_{n-1} une pièce de plus que P_n. On s'engage alors dans un système de don : P_1donne une pièce à P_2 , qui donne deux pièces à P_3, qui donne trois pièces à P_4, etc. et on continue jusqu'à P_n qui donne n pièces à P_1, qui donne $n + 1$ pièces à P_2, et le processus se déroule jusqu'à ce qu'une personne ne puisse pas donner une pièce de plus que le nombre de pièces reçues. On s'arrête, et on constate qu'une des personnes possède exactement 5 fois le nombre de pièces possédé par un de ses voisins.
Quelle est cette personne ? Combien y avait-il de personnes autour de la table ? Combien de pièces avait-on distribuées ?

6. Deux grands bols de balles

Des balles sont disposées dans deux grands bols, un nombre m de balles dans le premier, un nombre n de balles dans le second. Deux opérations sont possibles :
Opération α : ôter le même nombre de balles dans chacun des deux bols ;
Opération β : doubler le nombre de balles dans un des deux bols.

1. Est-il possible, au bout d'un nombre fini d'opérations α ou β, de vider les deux bols ?
2. On remplace l'opération β par l'opération γ : tripler le nombre de balles dans un des bols. Est-il possible, au bout d'un nombre fini d'opérations α ou γ, de vider les deux bols ?

7. Combien d'impairs jusqu'à 2 023 ?

On écrit tous les entiers, de 1 à 2 023 (enfin, on les écrit dans sa tête). Des chiffres pairs, 0, 2, 4, 6, 8 et des chiffres impairs, 1, 3, 5, 7, 9 se succèdent. Combien a-t-on écrit au total de chiffres impairs ?

Quiz

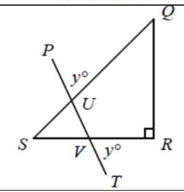
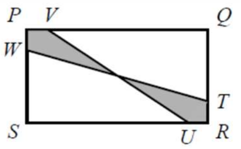
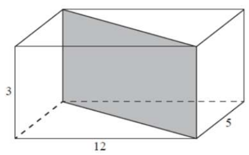
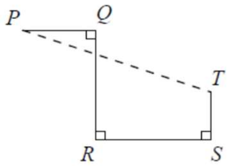
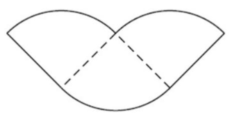
Pépinière académique de mathématiques « secondes » Avril 2023

Équipe constituée de :

……
……………………………………………

Exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier les « réponses » que vous donnerez aux questions suivantes. Les professeurs animateurs sont naturellement là pour vous donner des petits coups de pouce (ils vous suggèreront des raisonnements ou des démarches, pas des « réponses », ils peuvent aussi confirmer vos réponses pour vous aider à aller plus loin.

10 questions – 10 réponses – 50 minutes

N°	Figure	Énoncé de la question	Réponse
1.	$\begin{array}{r} PQR \\ +\quad QR \\ \hline 1\,0\,1\,2 \end{array}$	Dans l'addition ci-contre, P, Q et R représentent chacun un chiffre. Quelle est la valeur de $P+Q+R$?	
2.		Dans la figure ci-contre, le triangle QRS est rectangle isocèle en R et le segment $[TP]$ coupe les côtés $[QS]$ et $[RS]$ respectivement en U et V de telle façon que $\widehat{PUQ}=\widehat{RVT}=y°$. Que vaut y ?	
3.		Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle, $PS=2$, $PQ=4$ et les points T, U, V et W sont tels que les segments [UV] et [TW] se coupent au centre du rectangle et $RT=RU=PV=PW=a$. Quelle est la valeur de a pour que l'aire de la région ombrée soir égale à $\frac{1}{8}$ de celle du rectangle ?	
4.		La moyenne, la médiane et le mode de la série statistique des entiers 12, 9, 11, 16, x sont égaux. Quelle est la valeur de x ?	
5.	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 2{,}3 & & \\ \hline 3{,}6 & 3 & 2{,}4 \\ \hline & x & \\ \hline \end{array}$	Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme. Dans le carré magique ci-contre, quelle est la valeur de x ?	
6.		Combien existe-t-il d'entiers naturels non nuls n strictement inférieurs à 1 000 tels qu'il existe deux nombres premiers p et q distincts tels que $n=p^2q^2$?	
7.		Un prisme en bois à base rectangulaire (figure ci-contre) mesure $3\times5\times12$. Le prisme est coupé en deux par une coupe verticale qui passe par quatre sommets. Cette coupe crée deux prismes symétriques à base triangulaire. Quelle est l'aire totale de l'un de ces prismes à base triangulaire ?	
8.		Soit r, s et t des entiers strictement positifs tels que $r\times s\times t=1\,230$. Quelle est la plus petite valeur de $r+s+t$?	
9.		Dans la figure ci-contre, (PQ) est perpendiculaire à (QR), (QR) est perpendiculaire à (RS) et (RS) est perpendiculaire à (TS). On sait de plus que $PQ=4, QR=RS=8, ST=3$. Quelle est la distance PT ?	
10.		Un disque ayant une aire égale à 36π a été découpé en quarts et trois de ces quarts sont placés comme dans la figure ci-contre. Quel est le périmètre de cette figure ?	