ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Lycée Marie Curie
VERSAILLES

« Le goût pour les sciences abstraites en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas ; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos mœurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. »

C. F. Gauss (lettre de 1807)

Sophie GERMAIN (1776-1831)

Née dans une famille à l'abri du besoin, se passionne pour les mathématiques en lisant le « *Cours de mathématiques* » d'Étienne BÉZOUT et l' « *Histoire des mathématiques* » de Jean-Étienne MONTUCLA. Sa famille finit par reconnaître sa passion et son talent, et la soutient. Signant « Monsieur LE BLANC », elle correspond avec des mathématiciens du temps, dont Joseph-Louis LAGRANGE, alors professeur à Polytechnique Elle apprend à lire le latin et le grec pour aborder certains ouvrages mathématiques. Son talent est reconnu, elle communique avec Carl-Friedrich GAUSS (*voir citation*), qu'elle recommande à la sollicitude du général PERNETY lors de la prise de Brunswick.
Elle travaille sur l'équation de Fermat $x^n = y^n + z^n$ et prouve un théorème qui marque un progrès important. Sur la question des plaques vibrantes, ses travaux, qui marquent aussi des étapes importantes, sont reçus de manière un peu chaotique par l'Académie des sciences. Ses réflexions philosophiques seront publiées après sa mort.

Stage préolympique ouvert aux lycéennes et lycéens de première désigné(es) par leurs établissements, les 23 et 24 décembre 2024

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Marion PACAUD, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

Les intervenants professeurs : Hélène COCHARD (Lycée Blaise Pascal, ORSAY), Dominique CLENET (Lycée François Villon, LES MUREAUX, Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHÉNIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE)

… Et les professeurs accompagnant leurs élèves :

Emploi du temps

Lundi 23 décembre 2024

Versailles			
	Groupe 1	***Groupe 2***	***Groupe 3***
10.00	**Accueil**		
10.10 12.10	**Nombres HC**	**Dénombrement, probabilités CD**	**Géométrie SD**
12.10	**Repas**		
12.50 14.50	**Équations Fonctions DC**	**Géométrie PM**	**Dénombrement, Probabilités CD**
15.00 17.00	**Dénombrement, probabilités SD**	**Équations Fonctions DC**	**Nombres HC**

Mardi 24 décembre 2025

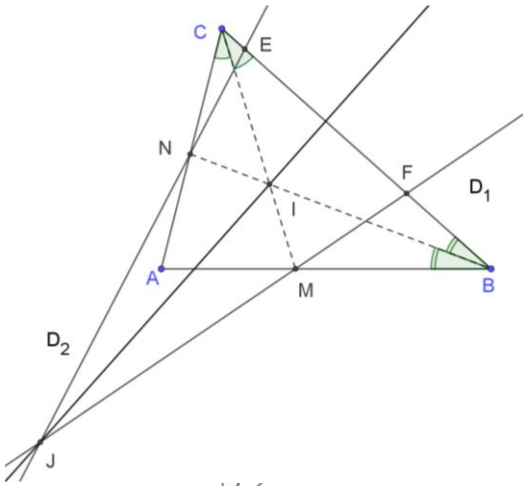
Versailles			
	Groupe 1	***Groupe 2***	***Groupe 3***
9.30 11.30	**Géométrie PM**	**Nombres CD**	**Équations Fonctions EL**
11.40 12.30	**Films ou exposé**		

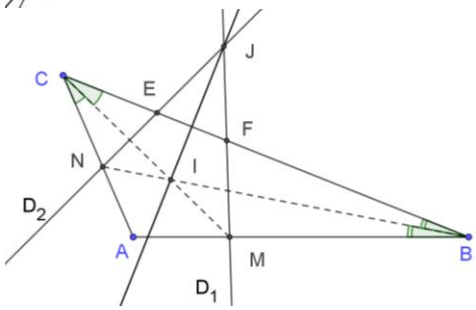
Géométrie

Exercice 1

Soit ABC un triangle dont le centre du cercle inscrit est noté I. L'image D_1 de la droite (AB) par la symétrie orthogonale s_1 d'axe (CI) et l'image D_2 de la droite (AC) par la symétrie orthogonale s_2 d'axe (BI) se coupent en un point J.
Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (BC).
(Le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point de concours des bissectrices des angles du triangle).

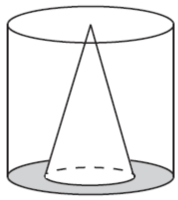
On note E le point d'intersection avec (BC) de l'image D_2 par s_2 de (AB) et F le point d'intersection avec (BC) de l'image D_1 par s_1 de (AC).
Montrons que la droite (IJ) est la médiatrice de [EF].
Le point A est sur (AB) donc son image A' par s_1 est sur D_1. De plus comme M et C sont sur (CI), $s_1(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ et $s_1(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$ donc, par conservation des mesures des angles,
$\widehat{\mathrm{MCA}'} = \widehat{\mathrm{ACM}} = \widehat{\mathrm{MCB}}$ d'où A' appartient à (BC). On en déduit que $\mathrm{F} = s_1(\mathrm{A})$.
On démontre de même que $\mathrm{E} = s_2(\mathrm{A})$.
On en déduit que $\widehat{\mathrm{JFC}} = \widehat{\mathrm{MFC}} = \widehat{\mathrm{MAC}} = \widehat{\mathrm{BAC}}$ toujours par conservation des mesures des angles.
De même, $\widehat{\mathrm{JEB}} = \widehat{\mathrm{NEB}} = \widehat{\mathrm{NAB}} = \widehat{\mathrm{CAB}}$
Et on en déduit que $\widehat{\mathrm{JFC}} = \widehat{\mathrm{JEB}}$ ce qui signifie que le triangle EJF est isocèle en J d'où JE = JF.
De plus, comme I est un point de (CI) et $\mathrm{F} = s_1(\mathrm{A})$, par conservation des distances, IA = IF et, de même IA = IE d'où IE = IF.
La droite (IJ) est donc bien la médiatrice de [EF].
En particulier, la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (BC) puisque E et F sont des points de (BC).
Remarque : le raisonnement a été fait avec un angle aigu en A. Dans le cas où cet angle est obtus $\widehat{\mathrm{JFC}} = \widehat{\mathrm{JEB}} = \pi - \widehat{\mathrm{BAC}}$.





Exercice 2

Un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon r contient de l'eau. Un cône de révolution ayant la même hauteur h et de rayon $\frac{r}{2}$ est immergé dans l'eau, sa face circulaire reposant sur la base du cylindre comme sur la figure ci-contre.
Une fois l'immersion faite, la profondeur de l'eau est égale à la moitié de la hauteur du cylindre.
Si le cône est ensuite retiré, quelle sera la profondeur de l'eau ?



La moitié du volume du cylindre est $\frac{1}{2}\pi r^2 h$

Le volume du cône est $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi r^2 h$.

Or, lorsque le cône est immergé, sa face circulaire repose sur la base du cylindre, sa partie émergeant de l'eau est un cône de révolution dont les dimensions sont la moitié de celles de grand cône et dont le volume est donc $\frac{1}{8} \times \frac{1}{12}\pi r^2 h = \frac{1}{96}\pi r^2 h$.

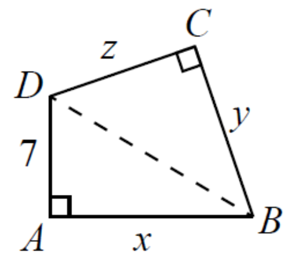
Le volume de la partie inférieure du grand cône (celle immergée) est donc $\frac{7}{8} \times \frac{1}{12}\pi r^2 h$.

Par conséquent, le volume d'eau est $\frac{1}{2}\pi r^2 h - \frac{7}{8} \times \frac{1}{12}\pi r^2 h = \frac{48-7}{96}\ \pi r^2 h = \frac{41}{96}\ \pi r^2 h$.

Lorsque le cône est retiré, l'eau occupe un cylindre de rayon r et de volume $\frac{41}{96}\ \pi r^2 h$. La profondeur de cette eau est donc telle que $\pi r^2 p = \frac{41}{96}\ \pi r^2 h$ soit $p = \frac{41}{96} h$.

Exercice 3

Soit ABCD un quadrilatère tel que $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90°$ et dont le périmètre vaut 224, l'aire vaut 2 205. On suppose de plus qu'un des côtés a pour longueur 7 et que les autres longueurs sont des nombres entiers.
Déterminer la somme S des carrés des longueurs des côtés du quadrilatère ABCD.

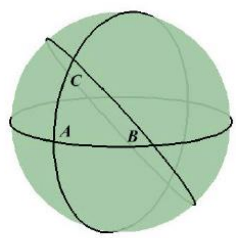


Chaque côté du quadrilatère est un côté adjacent àangle droit. On ne limite donc pas la recherche en supposant que $AD = 7$.
On pose alors $AB = x, BC = y, CD = z$ comme sur la figure ci-contre. On a donc :
$7 + x + y + z = 224$ soit $x + y + z = 217$ soit $y + z = 217 - x$. (*)
D'autre part, l'aire du quadrilatère est la somme des aires des triangles DAB et BCD rectangles respectivement en A et en C, ce qui se traduit par $\frac{7x}{2} + \frac{yz}{2} = 2\,205$ soit $7x + yz = 4\,410$.

Or, d'après le théorème de Pythagore appliqué dans ces deux triangles rectangles, $7^2 + x^2 = DB^2 = y^2 + z^2$ donc $y^2 + z^2 = x^2 + 49$.
En élevant au carré les membres de l'équation (*), on obtient :
$y^2 + z^2 + 2yz = x^2 - 434x + 47\,089$ soit $(x^2 + 49) + 2(4\,410 - 7x) = x^2 - 434x + 47\,089$. Cette équation se simplifie en $-14x + 434x = -49 - 8\,820 + 47\,809$ soit $420x = 38\,220$ c'est-à-dire $x = 91$.
On en déduit $y + z = 217 - x = 217 - 91 = 126$ et $yz = 4\,410 - 7 \times 91 = 3\,773$.
Les longueurs y et z sont donc les solutions de l'équation $u^2 - 126u + 3\,773 = 0$, équation dont le discriminant est $784 = 28^2$ et les solutions sont 77 et 49.
On en déduit que $S = 7^2 + 91^2 + 77^2 + 49^2 = 16\,660$.

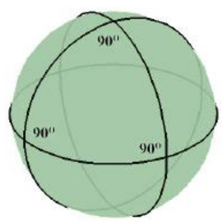
Exercice 4 – Les plateformes océaniques

Un groupe de chercheurs en océanographie possède trois plateformes A, B et C sur l'océan Pacifique contenant chacune un laboratoire.
Leurs recherches se limitent à la portion de l'océan Pacifique située à l'intérieur du triangle sphérique ABC (voir la figure ci-contre).
On sait que les angles en A, B et C mesurent respectivement 90°, 45° et 60°.
Déterminer la proportion de l'aire de la Terre que représente l'aire du triangle ABC.



A savoir :

- Contrairement au cas des triangles dans un plan, la somme des mesures des angles d'un triangle sphérique n'est pas toujours égale à 180°. Cette somme peut varier. Par exemple dans la figure ci-contre, la somme vaut 270°.
- L'aire d'un croissant entre deux demi-grands cercles est proportionnelle à l'angle entre ces deux demi grands cercles.



Comme l'aire d'un croissant entre deux demi-grands cercles est proportionnelle à l'angle entre ces deux demi grands cercles :

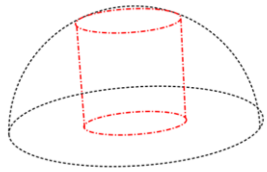
- Lorsque cet angle (en A) vaut 90° soit $\frac{1}{4}360°$ l'aire $\mathcal{A}_A$ du croissant vaut $\frac{1}{4}$ de l'aire $\mathcal{A}$ de la Terre.
- Lorsque cet angle (en B) vaut 45° soit $\frac{1}{8}360°$ l'aire $\mathcal{A}_B$ du croissant vaut $\frac{1}{8}$ de l'aire $\mathcal{A}$ de la Terre.
- Lorsque cet angle (en C) vaut 60° soit $\frac{1}{6}360°$ l'aire $\mathcal{A}_C$ du croissant vaut $\frac{1}{6}$ de l'aire $\mathcal{A}$ de la Terre.

Or l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle ABC est égale à $\frac{1}{4}\left((2\mathcal{A}_A + 2\mathcal{A}_B + 2\mathcal{A}_C) - \mathcal{A}\right)$

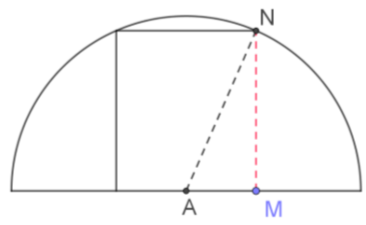
Soit $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{4}\left(\left(2 \times \frac{1}{4}\mathcal{A} + 2 \times \frac{1}{8}\mathcal{A} + 2 \times \frac{1}{6}\mathcal{A}\right) - \mathcal{A}\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) - 1\right)\mathcal{A} = \frac{1}{48}\mathcal{A}$.

Exercice 5 – Cylindre dans une boule

Dans une demi-boule de rayon 3, on a percé un cylindre droit de rayon $\sqrt{3}$ et d'axe l'axe de la demi-boule.
Pourrait-on réaliser un percement analogue avec un cylindre droit de même axe et de même volume (de rayon différent…) ?



D'après le théorème de Pythagore (appliqué dans un triangle AMN rectangle en A, centre de la base du cylindre située dans la base de la demi-boule et dont un coté est une génératrice ([MN] du cylindre), le cylindre droit a pour hauteur h solution de l'équation $3^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + h^2$.
Donc $h = \sqrt{6}$. Son volume est $V = 3\pi\sqrt{6}$



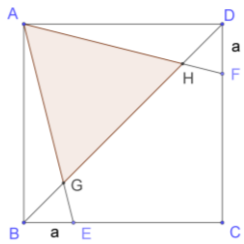
Un cylindre droit de rayon R inscrit dans cette demi-boule a une hauteur h' solution de l'équation $3^2 = R^2 + h'^2$.
Son volume est donc $V' = \pi R^2\sqrt{9 - R^2}$. L'égalité des deux volumes s'écrit donc $R^2\sqrt{9 - R^2} = 3\sqrt{6}$. En élevant au carré on obtient la condition *nécessaire* $R^6 - 9R^4 + 54 = 0$.
Or $\sqrt{3}$ est nécessairement une solution (pas celle qu'on cherche) de cette équation. On cherche donc à mettre $R^2 - 3$ en facteur, c'est-à-dire, on cherche quatre réels c, d, e, f tels que, pour tout réel R positif,
$R^6 - 9R^4 + 54 = (R^2 - 3)(R^4 + cR^3 + dR^2 + eR + f)$
Or $(R^2 - 3)(R^4 + cR^3 + dR^2 + eR + f) = R^6 + cR^5 + (d - 3)R^4 + (e - 3c)R^3 + (f - 3d)R^2 - 3eR - 3f$

On obtient le système $\begin{cases} c = 0 \\ d - 3 = -9 \\ e - 3c = 0 \\ f - 3d = 0 \\ 3e = 0 \\ -3f = 54 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} c = 0 \\ d = -6 \\ e = 0 \\ f = -18 \end{cases}$.

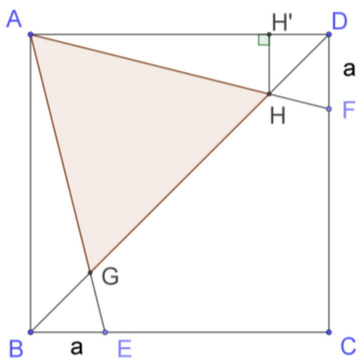
On est donc ramené à résoudre l'équation bicarrée $R^4 - 6R^2 - 18 = 0$.
En Posant $X = R^2$ on obtient l'équation $X^2 - 6X - 18 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 108 = 3 \times 36$ et la seule solution positive est $3 + 3\sqrt{3}$. On en déduit que la solution positive de l'équation $R^6 - 9R^4 + 54 = 0$ est $\sqrt{3 + 3\sqrt{3}}$.

Exercice 6

Soit ABCD un carré.
Les points E et F sont situés sur les côtés [BC] et [CD], E à la distance a de B, F à la distance a de D.
Les droites (AF) et (AG) coupent la diagonale [BD] en H et G respectivement.
Le côté du carré est 1.
Quelle est la valeur de a si le triangle AGH a pour aire $\frac{1}{3}$?



Notons h la distance de H à (AD), qui est aussi la distance de H à (CD) et, par symétrie, la distance de G à (BC) ou à (AB).
L'aire $\mathcal{A}$ du triangle AGH est la différence entre l'aire de AGD et celle de AHD :
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 - h) - \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} - h$.
Notons H' le projeté orthogonal de H sur (AD). Les triangles ADF et AH'H sont deux triangles rectangles ayant le même angle en A.
Ils sont donc semblables d'où $\frac{\mathrm{HH'}}{\mathrm{FD}} = \frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AD}}$ soit $\frac{h}{a} = \frac{1-h}{1}$, ce qui s'écrit $h = \frac{a}{1+a}$.
On en déduit $\mathcal{A} = \frac{1-a}{2(1+a)}$. L'aire du triangle équilatéral est donc $\frac{1}{3}$ lorsque $a = \frac{1}{5}$.



Nombres

Exercice 1

Ecrire le plus simplement possible le nombre $N = \left(2+\sqrt{5}\right)^{2\,024}\left(2-\sqrt{5}\right)^{2\,025}$.

$\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right) = 4-5 = -1$
Donc $N = (-1)^{2\,024} \times \left(2-\sqrt{5}\right) = 2-\sqrt{5}$

Exercice 2

Montrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{35n+7}{21n+4}$ est irréductible.

Pour tout entier naturel n :
Si d est un diviseur commun à $35n+7$ et $21n+4$ alors d divise $35n+7-(21n+4) = 14n+3$.
Comme d est un diviseur commun à $21n+4$ et $14n+3$ alors d divise $21n+4\ -(14n+3) = 7n+1$.
Comme d est un diviseur commun à $14n+3$ et $7n+1$ alors d divise $14n+3\ -(7n+1) = 7n+2$
Comme d est un diviseur commun à $7n+1$ et $7n+2$ alors d divise $7n+2\ -(7n+1) = 1$
Le seul diviseur positif de 1 est 1 donc d=1 et la fraction est irréductible.

Exercice 3

On considère quatre entiers a, b, c, d deux à deux distincts choisis parmi les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Quelle est la plus grande valeur que le nombre $ac+bd-ad-bc$ peut prendre ?

On commence par remarquer que $ac+bd-ad-bc = a(c-d)-b(c-d) = (a-b)(c-d)$.
Comme tous les entiers sont distincts deux à deux et compris entre 1 et 10, $a-b \leq 9$ et $c-d \leq 9$.
On va étudier toutes les valeurs possibles pour $a-b$.

- Si $a-b=9$, alors $a=10$ et $b=1$. On en déduit que $1 \leq c-d \leq 7$ car c et d sont choisis parmi les nombres entiers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Dans ce cas $(a-b)(c-d) \leq 9 \times 7$ soit $(a-b)(c-d) \leq 63$.

- Si $a-b=8$, alors soit $a=10$ et $b=2$ soit $a=9$ et $b=1$. Dans les deux cas, on ne peut avoir $c-d=9$ mais on peut avoir $c-d=8$ et alors $(a-b)(c-d) \leq 64$.
- Si $1 \leq a-b \leq 7$, alors, comme $c-d \leq 9$, $(a-b)(c-d) \leq 63$.

Donc dans la situation où $a-b>0$, la seule possibilité est $(a-b)(c-d)=64$ et elle se réalise par exemple lorsque $a=9, b=1, c=10$ et $d=2$.
Par symétrie, pour le cas où $a-b<0$ et donc $c-d<0$, on aura de même $(a-b)(c-d)=64$ si $a=1, b=9, c=2$ et $d=10$.

Exercice 4

Déterminer le nombre de suites de 11 nombres réels positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ telles que $a_1 = 4, a_{11} = 1\,024$ et, pour tout entier $n \in [2{,}11]$, $a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n a_{n-1}}$.

Considérons déjà, pour x et y deux réels strictement positifs, l'équation $x+y=\frac{5}{2}\sqrt{xy}$. Comme $x>0$ et $y>0$, cette équation équivaut $(x+y)^2 = \frac{25}{4}xy$ soit $4(x+y)^2 = 25xy$ c'est-à-dire $4x^2-17xy+4y^2=0$.
En posant $u=\frac{x}{y}$, cette équation s'écrit $4u^2-17u+4=0$ et a pour solutions 4 et $\frac{1}{4}$. L'équation $x+y=\frac{5}{2}\sqrt{xy}$ équivaut donc à $x=4y$ ou $y=4x$.
Les suites considérées sont donc telles que chaque terme de la suite est obtenu à partir du précédent en le multipliant par 4 ou en le divisant par 4. Définir ces suites c'est préciser, pour chacun des dix passages d'un terme au suivant, l'opération effectuée.
On sait que $a_1 = 4$ et $a_{11} = 1\,024$, $\frac{a_{11}}{a_1} = 256 = 4^4$ et s'il y a m opérations multiplications par 4, il y a $10-m$ opérations divisions par 4 donc $\frac{4^m}{4^{10-m}} = 4^4$ soit $m-(10-m)=4$ c'est-à-dire $2m-10=4$ soit $m=7$.

Le nombre de telles suites est donc le nombre de façons de choisir 7 opérations (divisions) parmi 10 (divisions ou multiplications), ce qui revient à choisir 3 opérations (multiplications) parmi 10 (divisions ou multiplications) soit $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120.$

Exercice 5

Jeanne écrit 2024 nombres naturels le long d'un cercle.
Soit n un entier naturel strictement positif. On note $n!$ le produit des entiers non nuls inférieurs ou égaux à n. Par exemple, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
Jeanne veut que les 2 024 produits de paires de nombres adjacents soient exactement l'ensemble $\{1!, 2!, \ldots, 2\,024!\}$
Peut-elle y parvenir ?

Si cette répartition était possible alors le produit $1! \times\ 2! \times \ldots \times\ 2\,024!$ serait un carré parfait. On va montrer que ce n'est pas le cas. En effet, pour tout entier naturel non nul n, $n! \times (n+1)! = n! \times (n+1) \times n! = (n!)^2 \times (n+1)$ donc
$1! \times\ 2! \times \ldots \times\ 2\,024! = (1!)^2 \times 2 \times (3!)^2 \times 4 \times \ldots \times (2\,023!)^2 \times 2\,024 = 2 \times 4 \times \ldots \times 2\,024 \times (1! \times 3! \times \ldots \times 2\,023!)^2$
C'est-à-dire $1! \times\ 2! \times \ldots \times\ 2\,024! = 2^{1\,012} \times 1 \times 2 \times \ldots \times 1\,012 \times (1! \times 3! \times \ldots \times 2\,023!)^2$
Soit $1! \times\ 2! \times \ldots \times\ 2\,024! = 1\,012! \times\ (2^{506} \times 1! \times 3! \times 2\,023!)^2$.
Or 1 012! N'est pas un carré parfait car, par exemple le nombre premier 1 009 n'apparait qu'une fois comme facteur du produit 1 012!.

Exercice 6

Un entier naturel non nul n est dit *pratique* si tout entier naturel non nul inférieur ou égal à n peut s'écrire comme la somme de diviseurs deux à deux distincts de n.
Par exemple, 6 est un entier pratique car $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 1 + 3, 5 = 2 + 3, 6 = 6$.
Montrer que si p et q sont deux entiers naturels pratiques alors pq est un entier naturel pratique.

Soit p et q sont deux entiers naturels pratiques et soit k un entier naturel non nul tel que $k \leq pq$.
La division euclidienne de k par q permet d'affirmer qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que :
$k = aq + b$ et $0 \leq b < q$. De plus, comme $k \leq pq$, $0 \leq a \leq p$.
Comme p et q sont des entiers pratiques, il existe donc des diviseurs deux à deux distincts $c_1, c_2, \ldots, c_m$ de p et des diviseurs deux à deux distincts $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de q tels que $a = c_1 + c_2 + \ldots + c_m$ et $b = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. On peut alors écrire $k = (c_1 + c_2 + \ldots + c_m)q + d_1 + d_2 + \ldots + d_n = c_1q + c_2q + \cdots + c_mq + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$.
Or, pour tout i variant de 1 à m et pour tout j variant de 1 à n, $d_j < q \leq c_iq$ car d_j est un diviseur de q et $1 \leq c_i$ donc $d_j \neq c_iq$. Les d_j sont deux à deux distincts comme les c_iq.
On a donc bien écrit k comme somme de diviseurs deux à deux distincts de pq qui est donc bien un entier pratique.

Équations - Fonctions

Exercice 1

On note a, b, c les solutions de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$. Calculer le nombre $N = \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$.

Remarquons déjà que le nombre N est bien défini car 1 n'est pas solution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.
De plus si a, b, c les solutions de cette équation alors, pour tout réel x, $x^3 - x - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)$.
Or, pour tout réel x, $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$.
Cela signifie que $\begin{cases} -(a+b+c) = 0 \\ ab+bc+ca = -1 \\ -abc = -1 \end{cases}$.
Or $N = \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}((1+a)(1-b)(1-c) + (1+b)(1-a)(1-c) + (1+c)(1-a)(1-b)$
Soit $N = \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}((1+a)(1-b-c+bc) + (1+b)(1-a-c+ac) + (1+c)(1-a-b+ab))$.
$(1+a)(1-b-c+bc) = 1+a-b-c+bc-ab-ac+abc$
Sans calcul, on en tire $(1+b)(1-a-c+ac) = 1+b-c-a+ca-bc-ba+bca$
Et $(1+c)(1-a-b+ab) = 1+c-a-b+ab-ca-cb+cab$
Et, par somme et après simplification
$N = \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}(3-(a+b+c)-(ab+bc+ca)+3abc)$
soit $N = \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}(3-0-(-1)+3\times 1) = \frac{7}{(1-a)(1-b)(1-c)}$.
Or si on pose $f(x) = x^3 - x - 1$ alors $(1-a)(1-b)(1-c) = f(1) = -1$
Conclusion $N = -7$.
Remarque : quand des variables jouent des rôles symétriques, il faut penser à limiter les calculs à l'aide d'une permutation circulaire comme cela a été fait ici.

Exercice 2

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation $\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x$ (*)

Comme une racine carrée est un nombre positif ou nul, si x est une solution, x est une somme de nombres postifs ou nuls donc $x \geq 0$ et même $x > 0$ pour que $\frac{1}{x}$ soit défini.
De plus, **dans** $]0, +\infty[$:
$x - \frac{1}{x} \geq 0$ équivaut à $x^2 - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 1$ et $1 - \frac{1}{x} \geq 0$ équivaut à $x \geq 1$.
On cherche donc des solutions dans $[1, +\infty[$.
L'équation (*) y est équivalente à $\left(\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = x^2$
Soit $x - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}}\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x^2$ soit $x + 1 - \frac{2}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}}\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x^2$
C'est-à-dire $x^2 + x - 2 + 2x\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x^3$ soit $2\sqrt{x^2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x^3 - x^2 - x + 2$
Soit $x^3 - x^2 - x + 2 - 2\sqrt{(x^2-1)(x-1))} = 0$ soit $x^3 - x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = 0$
Or cette équation peut aussi s'écrire
$(x^3 - x^2 - x + 1) - 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} + 1 = 0$ c'est-à-dire $\left(\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} - 1\right)^2 = 0$
Elle équivaut donc à $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = 1$ soit $x^3 - x^2 - x + 1 = 1$ c'est-à-dire $x^3 - x^2 - x = 0$ soit, puisque $x \neq 0$, $x^2 - x - 1 = 0$.
Les solutions de cette équation sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on ne garde que la solution appartenant à $[1, +\infty[$:
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est l'unique solution de l'équation de départ.

Exercice 3

Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels (x, y, z), vérifiant le système $\begin{cases} xy = z - x - y \\ yz = x - y - z \\ zx = y - z - x \end{cases}$.

En retranchant la deuxième équation à la première, on obtient : $y(x - z) = 2(z - x)$ soit $(y + 2)(x - z) = 0$
C'est-à-dire $y = -2$ ou $x = z$.

- Si $y = -2$ alors la première équation s'écrit $-2x = z - x + 2$ soit $x + z = -2$. La troisième équation s'écrit alors $zx = -2 - (z + x) = -2 + 2 = 0$. Cela équivaut à $z = 0$ ou $x = 0$.

  Dans le cas où $z = 0$, la deuxième équation donne $x = yz + y + z = 0 - 2 + 0 = -2$ et on obtient le triplet $(-2, -2, 0)$.

  Dans le cas où $x = 0$, la première équation donne $z = xy + x + y = 0 + 0 - 2 = -2$ et on obtient le triplet $(0, -2, -2)$.

- Si $x = z$ alors la première équation s'écrit $xy = -y$ soit $(x + 1)y = 0$ c'est-à-dire $x = -1$ ou $y = 0$.

  Dans le cas où $x = -1$, comme $z = x$, la troisième équation donne $y = zx + z + x = 1 - 1 - 1 = -1$ et on obtient le triplet $(-1, -1, -1)$.

  Dans le cas où $y = 0$, comme $z = x$, la troisième équation donne $x^2 = 0 - x - x$ soit $(x + 2)x = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = -2$. On obtient alors les deux triplets $(0,0,0)$ et $(-2, 0, -2)$.

  Il ne reste plus qu'à vérifier que les triplets $(-2, -2, 0), (0, -2, -2), (-1, -1, -1), (0,0,0), (-2, 0, -2)$ sont bien solutions du système…

Exercice 4

Déterminer toutes les fonctions f définies de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}$ et telles que :

pour tous rationnels x et y, $f(2f(x) + f(y)) = 2x + y$. (*)

On pourra commencer par montrer que pour tous rationnels x et y, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

En prenant $y = x$, (*) s'écrit $f\left(3f(x)\right) = 3x$ puis $f(9x) = f(3 \times 3x) = f\left(3 \times f\left(3f(x)\right)\right) = 3 \times 3f(x) = 9f(x)$.
En particulier $f(0) = f(9 \times 0) = 9 \times f(0)$ d'où $f(0) = 0$.
En prenant $x = 0$ dans (*), pour tout rationnel y, $f(y) = f\left(2 \times 0 + f(y)\right) = 2 \times 0 + y$ soit $f\left(f(y)\right) = y$.
Alors, d'après (*), pour tous rationnels x et y, $2f(x) + f(y) = f\left(f\left(2f(x) + f(y)\right)\right) = f(2x + y)$.
Or en prenant $y = 0$ et puisque $f(0) = 0$, (*) s'écrit $f(2f(x)) = 2x$.
On a donc, pour tous rationnels x et y, $f(2x + y) = f(2x) + f(y)$. (**)
D'après (**), on peut donc affirmer que pour tous rationnels u et v, $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
(car on peut poser $u = 2x$ et $v = y$).
On en déduit que pour tout rationnel x, $f(2x) = 2f(x), f(3x) = 3f(x)$ et de proche en proche, pour tout entier naturel n non nul, $f(nx) = nf(x)$. En particulier $f(n) = nf(1)$. Posons $k = f(1)$. Pour entier naturel n non nul, $f(n) = kn$.
Alors $k = f(1) = f\left(n \times \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}$
et pour tous entiers naturels m et n, $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \times \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = m\frac{k}{n} = k\frac{m}{n}$
Pour tout rationnel positif x, on a donc $f(x) = kx$ d'où $1 = f\left(f(1)\right) = f(k) = k \times k$ d'où $k^2 = 1$ c'est-à-dire $k = 1$ ou $k = -1$.
On vérifie que les fonctions f_1 et f_2 définies par $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = -x$ sont bien solutions du problème et ce sont les seules.

Exercice 5

Trouver le plus grand entier k possédant la propriété suivante : quels que soient les nombres réels $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2\,024}$ tels que

$$x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = \cdots = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2\,024})^2$$

il en existe au moins k qui soient égaux.

Montrons qu'étant donnés 2 024 nombres réels vérifiant la propriété, on peut toujours en trouver 675 qui sont tous égaux.
Notons, pour tout $k \in \{1, \dots, 2024\}$, $s_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$. Alors, comme $s_k^2 = x_k^2$, $|s_k| = |x_1|$.
En particulier, les nombres s_k ne peuvent prendre qu'au plus deux valeurs possibles, à savoir x_1 et $-x_1$.
On en déduit que pour tout $k \in \{1, \dots, 2024\}$, $x_k = s_k - s_{k-1}$ ne peut prendre qu'au plus trois valeurs, à savoir $-2x_1, 0, 2x_1$. Le plus petit entier supérieur à $\frac{2\,024}{3}$ est 675. Par le principe des tiroirs, il existe une de ces valeurs qui est prise par 675 nombres réels.
Or, si on choisit $x_1 = 1$, pour tout $k \in \{1, \dots, 675\}, x_{2k} = -2$ et $x_{2k+1} = 2$ et, pour tout $k \in \{1\,352, \dots, 2\,024\}$, $x_k = 0$, alors le résultat de chaque somme entre parenthèse est 1 ou -1. Les carrés sont donc bien tous égaux mais on n'a pas 676 nombres réels égaux.
Donc l'entier cherché est $k = 675$.

Exercice 6

Trouver toutes les polynômes $P(x)$ tels que $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ est un polynôme constant.

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$.
Alors $f(-1) = 2P(-1)$ et $f(1) = 2P(0)$. Si $f(x)$ est un polynôme constant alors $f(-1) = f(1)$ soit $P(-1) = P(0)$. On note $P(-1) = P(0) = c$ et $Q(x) = P(x) - c$.
Alors $Q(-1) = Q(0)$, ce qui signifie qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que $Q(x) = x(x+1)R(x)$.
On a donc $P(x) = x(x+1)R(x) + c$
Et $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x) = (x+1)\big((x-1)xR(x-1) + c\big) - (x-1)(x(x+1)R(x) + c)$
Soit $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x) = x(x+1)(x-1)\big(R(x-1) - R(x)\big) + 2c$.
Ce polynôme sera constant si et seulement si le polynôme $x(x+1)(x-1)\big(R(x-1) - R(x)\big)$ est constant, ce qui entraine que le polynôme $R(x-1) - R(x)$ est le polynôme nul.
C'est-à-dire, pour tout nombre réel x, $R(x-1) = R(x)$. Si on note k la valeur commune de $R(x-1)$ et $R(x)$, alors le polynôme $R(x) - k$ a une infinité de racines.
C'est donc le polynôme nul c'est-à-dire, pour tout nombre réel, $R(x) = k$ soit $Q(x) = x(x+1)k$ et donc $P(x) = x(x+1)k + c = kx^2 + kx + c$.

Il reste à vérifier que si k et c sont des nombres réels quelconques, alors le polynôme $P(x) = kx^2 + kx + c$ est bien tel que $f(x) = (x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ qui est un polynôme constant.
Or, pour tout réel x,
$f(x) = (x+1)(k(x-1)x + c) - (x-1)(kx(x+1) + c)$
Soit $f(x) = kx(x+1)(x-1) + c(x+1) - kx(x+1)(x-1) - c(x-1)$
Soit $f(x) = c(x+1) - c(x-1)$
Soit $f(x) = 2c$ ce qui prouve que, pour tout réels k et c, le polynôme $P(x) = x(x+1)k + c$ est bien solution du problème.

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1

On jette trois dés non pipés numérotés de 1 à 6 et on calcule la somme S des trois numéros des faces supérieures. Déterminer la probabilité que $S > 5$.

On désigne par un triplet (a, b, c) chaque résultat d'un jet des trois dés. Comme pour chaque dé, il y a 6 résultats possibles, le nombre de triplets possibles est $6 \times 6 \times 6 = 216$.
De plus les valeurs prises par S sont comprises entre 3 (avec le triplet (1,1,1)) et 18 (avec le triplet (6,6,6).
Enfin la probabilité d'avoir $S > 5$ est 1 moins la probabilité d'avoir $S \leq 5$ événement plus facile à traiter en étudiant les trois cas $S = 3, S = 3, S = 4, S = 5$.
Il n'y a qu'un triplet tel que $S = 3$: le triplet (1,1,1).
Les triplets (a, b, c) tels que $S = 4$, c'est-à-dire $a + b + c = 4$ sont (1,1,2), (1,2,1) et (2,1,1).
Les triplets (a, b, c) tels que $S = 5$, c'est-à-dire $a + b + c = 5$ sont (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (1,2,2), (2,1,1).
La probabilité d'avoir $S \leq 5$ est $\frac{1+3+6}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$ d'où la probabilité d'avoir $S > 5$ est $1 - \frac{5}{108} = \frac{103}{108}$.

Exercice 2

Combien y a-t-il d'entiers n tels que $100 \leq n \leq 999$ dont la somme des chiffres $s(n)$ est telle que $7 \leq s(n) \leq 11$?

Pour tout entier n tel que $100 \leq n \leq 999$, il existe trois entiers a, b, c tels que $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$ et $n = \overline{abc}$. On a alors $s(n) = a + b + c$ et on cherche le nombre d'entiers tels que $7 \leq a + b + c \leq 11$.

- Dans le cas où $s(n) = 7$:
  Si $a = 1$, alors on veut $b + c = 6$. Ceci est vérifié avec les 7 couples (0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) et (6,0).
  Si $a = 2$, alors on veut $b + c = 5$. Ceci est vérifié avec les 6 couples (0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) et (5,0).
  De même si $a = 3$ (respectivement $a = 4$, $a = 5$, $a = 6$, $a = 7$), il y aura 5 (respectivement 4, 3, 2, 1) couples possibles.

Le nombre d'entiers n tels que $s(n) = 7$ est $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

- On étudie de même les cas où :

$s(n) = 8$, ce qui donne $8 + 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 1 = 36$ entiers
$s(n) = 9$, ce qui donne $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 1 = 45$ entiers

- Dans le cas où $s(n) = 10$:

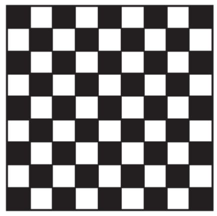
Si $a = 1$, alors on veut $b + c = 9$. Ceci est vérifié avec les 10 couples (0,9), (1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (8,1) et (9,0).
Comme précédemment, au fur et à mesure que a augmente, le nombre de couples diminue (pour $a = 9$, il n'y a que deux couples) et le nombre d'entiers n tels que $s(n) = 10$ est $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 54$.

- Dans le cas où $s(n) = 11$:

Si $a = 1$, alors on veut $b + c = 10$. Ceci est vérifié avec les 9 couples (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2) et (9,1).
Si $a = 2$, alors on veut $b + c = 9$. Comme on l'a déjà vu, ceci est vérifié avec 10 couples.
Si $a = 3$, alors on veut $b + c = 8$. Comme on l'a déjà vu, ceci est vérifié avec 9 couples.
....
Le nombre d'entiers n tels que $s(n) = 11$ est donc $9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 61$.
Au final, le nombre d'entiers n compris entre 110 et 999 et tels que $7 \leq s(n) \leq 11$ est
$S = 28 + 36 + 45 + 54 + 61$ soi $S = 224$.

Exercice 3

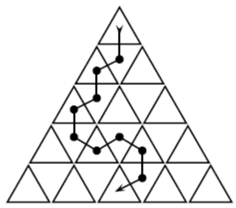
Sur un damier on dit que des tours sont *attaquantes* si elles se trouvent dans la même rangée ou dans la même colonne du damier.
De combien de manières peut-on placer 8 tours non attaquantes sur un damier 9×9 (voir figure ci-contre), de telle façon que toutes ces 8 tours se retrouvent sur des carrés de la même couleur ?



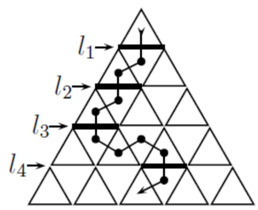
On considère d'abord le cas des carrés noirs. Il y a 8 tours et 9 rangées, donc une rangée sera sans tour.
Il y a deux cas possibles : la rangée sans tour a 5 carrés noirs ou elle a 4 carrés noirs.
Par permutation de rangées, cette rangée sans tour peut être considérée soit comme la dernière soit comme l'avant dernière.
Dans chacun des cas, on va compter le nombre de manières de placer les tours en procédant par rangée.
Dans le premier cas, il y a 5 choix pour la rangée sans tour, qu'on considère comme la dernière. On peut alors placer la tour en première rangée de 5 manières et la tour en deuxième rangée de 4 manières. Pour placer une tour en troisième rangée il suffit d'éviter la colonne contenant la tour de première rangée, ce qui donne 4 possibilités.
Par un raisonnement similaire, on peut placer la tour en quatrième rangée de 3 manières, pour éviter la tour déjà placée en deuxième rangée.
Le nombre de possibilités dans le premier cas est ainsi 5 fois $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = (5!)^2$.
Dans le deuxième cas, il y a 4 choix pour la rangée sans tour, qu'on considère être l'avant dernière. En raisonnant comme précédemment, le nombre de manières de placer les tours est
4 fois $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 4 \times 5! \times 4!$
On raisonne de même pour les carrés blancs. Si la rangée sans tour a 4 cases blanches, il y a
5 fois $4 \times 5 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 = (5!)^2$ manières de placer les tours ainsi.
On peut remarquer l'impossibilité qu'une rangée contenant 5 carrés blancs soit sans tour.
Au final, le nombre cherché est
$(5!)^2 + 4 \times 5! \times 4! + (5!)^2 = 40\,320$

Exercice 4

On considère un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n. Ce triangle est divisé en triangles équilatéraux de côté 1 (voir figure ci-contre pour $n = 5$).
On note C_n le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusqu'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune, que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure).
Déterminer $C_{2\,024}$.



On note $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{2\,023}$ les segments horizontaux du triangle que le chemin doit traverser, chacun une seule fois puisqu'il ne peut aller vers le haut.
Pour chaque entier k compris entre 1 et 2023, il y a l_k est constitué de k petits segments (côtés de triangles équilatéraux de côté 1). Il y a donc k choix pour un chemin de franchir l_k. (une fois dans un petit triangle, il n'y a qu'une seule possibilité d'atteindre (déplacement horizontal) le petit segment à franchir).



Au total, le nombre de chemins allant du petit triangle en haut au petit triangle au centre de la rangée du bas est

$$C_{2\,024} = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2\,023 = 2\,023!$$

Exercice 5

On déplace un pion au hasard sur les 9 cases d'un plateau 3×3. Les cases sont numérotées comme sur la figure ci-contre.
Au temps 0, le pion est sur la case 1 puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une case voisine, les mouvements diagonaux étant interdits.
Dans chaque position du pion, les probabilités d'être déplacées vers une des cases voisines sont égales.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Déterminer la probabilité que la case 3 soit visitée avant la case 9.

Remarquons déjà qu'il a trois situations possibles en termes de nombre de cases voisines :

- 2 cases voisines et la probabilité d'être déplacé vers une de ces cases est donc $\frac{1}{2}$.
- 3 cases voisines et la probabilité d'être déplacé vers une de ces cases est donc $\frac{1}{3}$.
- 4 cases voisines et la probabilité d'être déplacé vers une de ces cases est donc $\frac{1}{4}$.

Soit P_i la probabilité que, partant de la case i, le pion visite la case 3 avant la case 9. On cherche P_1.
Par symétrie entre les positions des cases 3 et 9, on a :
$P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{2}$. D'autre part, $P_7 = 1 - P_1, P_8 = 1 - P_2$ et $P_3 = 1, P_9 = 0$.
Si le pion est dans la case 1 au temps 0, au temps 1, le pion sera dans la case 2 ou la case 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ donc
$P_1 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_4 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}$.
Si le pion est dans la case 2 au temps 1, le pion sera dans l'une des cases 1, 3 ou 5 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ donc
$P_2 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_3 + \frac{1}{3}P_5 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2}$.
On tire des deux relations entre P_1 et P_2 : $P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$ soit $\frac{5}{6}P_1 = \frac{1}{2}$ soit $P_1 = \frac{3}{5}$.

Exercice 6

Un programme génère des nombres aléatoires entre 0 et 1. Le programme est conçu de telle sorte que pour tout x de 0 à 1, la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que x est trois fois plus grande que celle qu'il génère un nombre plus petit que $\frac{x}{4}$.
De plus, la probabilité qu'il génère un nombre supérieur ou égal à x est égale à la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $(1 - x)$.
Calculer la probabilité que ce programme nous donne un nombre strictement plus petit que $\frac{1}{21}$.

Soit $P(x)$ la probabilité que le programme génère un nombre strictement plus petit que x.
L'événement « le programme génère un nombre supérieur ou à x » est le contraire de l'événement « le programme génère un nombre strictement plus petit que x ».
Or la probabilité qu'il génère un nombre supérieur ou égal à x est égale à la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $(1 - x)$.
Donc $P(x) + P(1 - x) = 1$
De plus $P(x) = 3P\left(\frac{x}{4}\right)$.
On en déduit les égalités suivantes :
$P\left(\frac{1}{21}\right) = 1 - P\left(\frac{20}{21}\right) = 1 - 3P\left(\frac{5}{21}\right) = 1 - 3\left(1 - P\left(\frac{16}{21}\right)\right) = 1 - 3\left(1 - 3P\left(\frac{4}{21}\right)\right) = 1 - 3\left(1 - 3 \times 3P\left(\frac{1}{21}\right)\right)$
Soit $P\left(\frac{1}{21}\right) = 1 - 3 + 27P\left(\frac{1}{21}\right)$ c'est-à-dire $26P\left(\frac{1}{21}\right) = 2$ soit $P\left(\frac{1}{21}\right) = \frac{1}{13}$.